

X_n - стање систем и корак / прелаз

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \\ = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = \dots, X_0 = \dots)$$

МАРКОВЉЕВО СВОЈСТВО

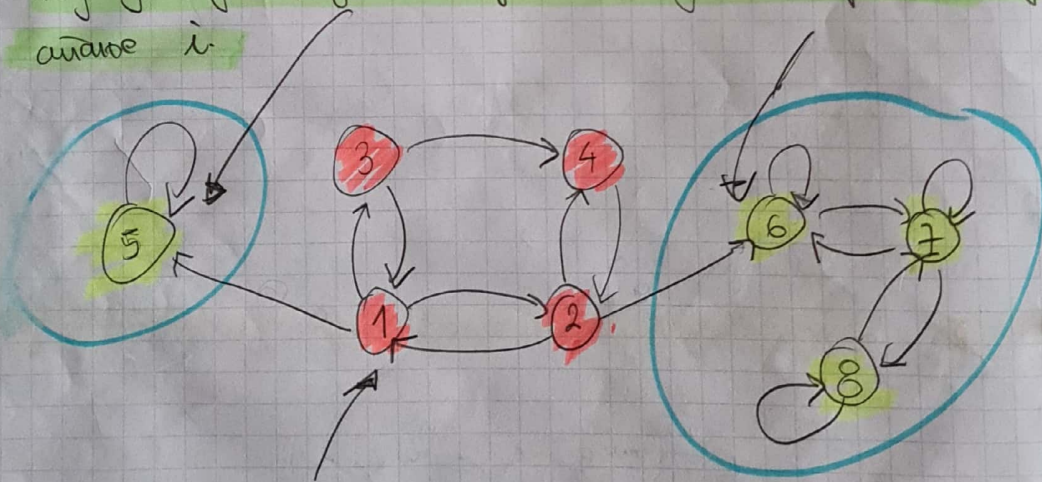
Пример. Лошис који лежи. Да ли нам је довољно да знамо њену позицију, па да можемо да одредимо где ће се налазити у наредном тренутку?

СПЕЦИФИКАЦИЈА МОДЕЛА

- Одређивање која ће нам случајна величина представљати стање
- Одређивање могуће преласке
- Одређивање вероватноће преласка у стања

РЕКУРЕНТНА И ТРАНЗИТНА СТАЊА

Стање i је **РЕКУРЕНТНО** ако кренувши из стања i , где год да одемо, увек постоји начин да се вратимо у стање i .



Ако стање није рекурентно, онда је **ТРАНЗИТНО**: ако кренемо из стања i , када постоји стање j које можемо да одемо, али не можемо да се вратимо у стање i .

Транзитна стања могу бити посећена само **КОНАЧАН** број пута, али ће у неким тренутцима скокити у рекурентно стање и тамо се задржавати.

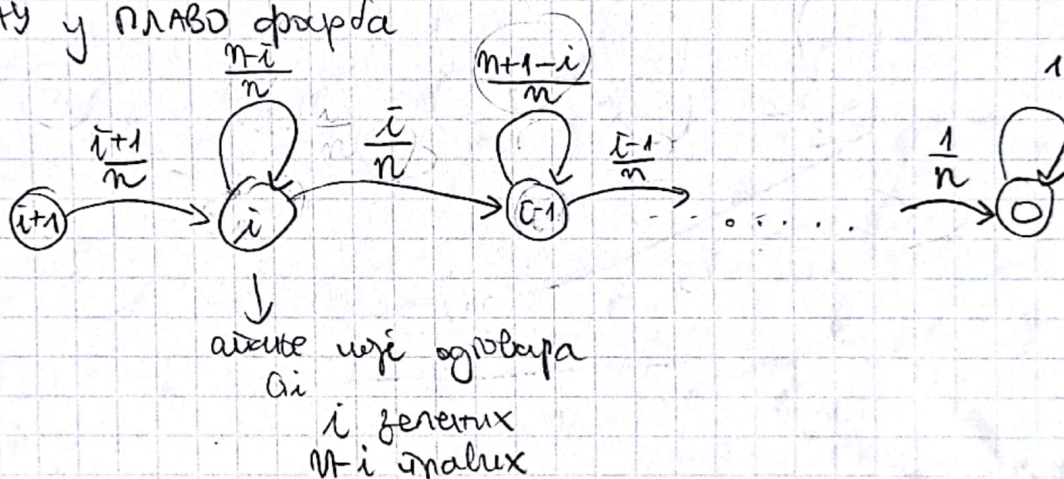
РЕКУРЕНТНА КЛАСА: колекција рекурентних стања која комуницирају само са собом и изједначују стања.

пример: у језеру се налази n риба. Неке су зелене, а неке плаве. Хелена сваког дана уносила по једну рибу, и ако је зелена, офарба је у плаво. Сваку рибу врати назад у језеро. Како је G_i догађај: $\{ \text{у језеру се налази } i \text{ зелених риба} \}$.

а) Моделовати ову рибарску веху Маркововим ланцем у коме су $\{G_i\}$ стања.

$\{G_i\}$ - i ЗЕЛЕНИХ риба ($n-i$ ПЛАВИХ)

ЗЕЛЕНУ у ПЛАВО офарба

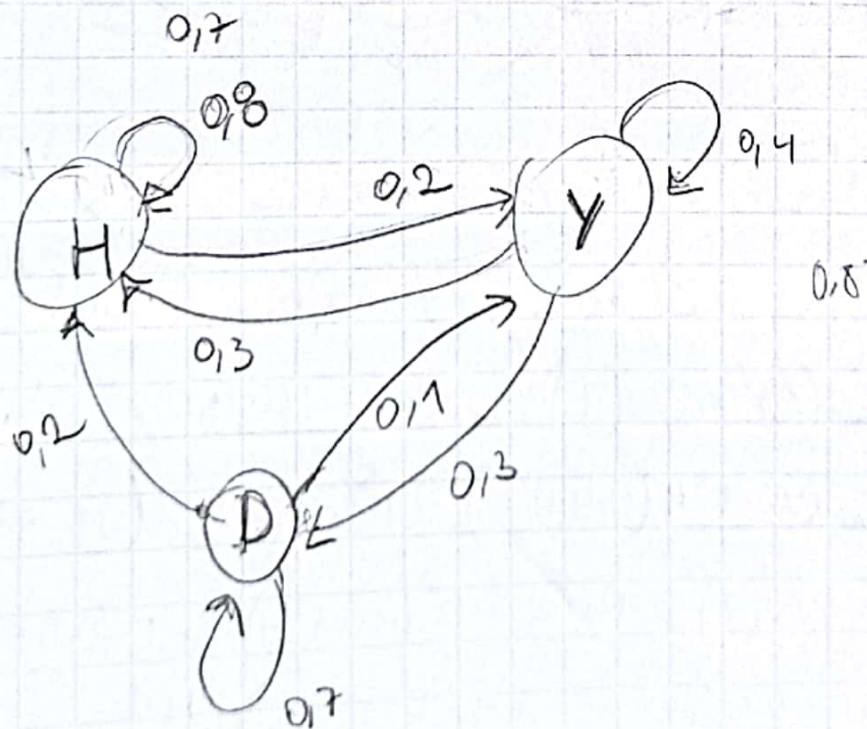


б) Одредити вероватноће p_{ij}

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{n-i}{n} & , j=i \\ \frac{i}{n} & , j=i-1 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

в) Које стања су апсорптивна, а која рекурзивна?
 Рекурзивно је стање 0, а апсорптивна остала.

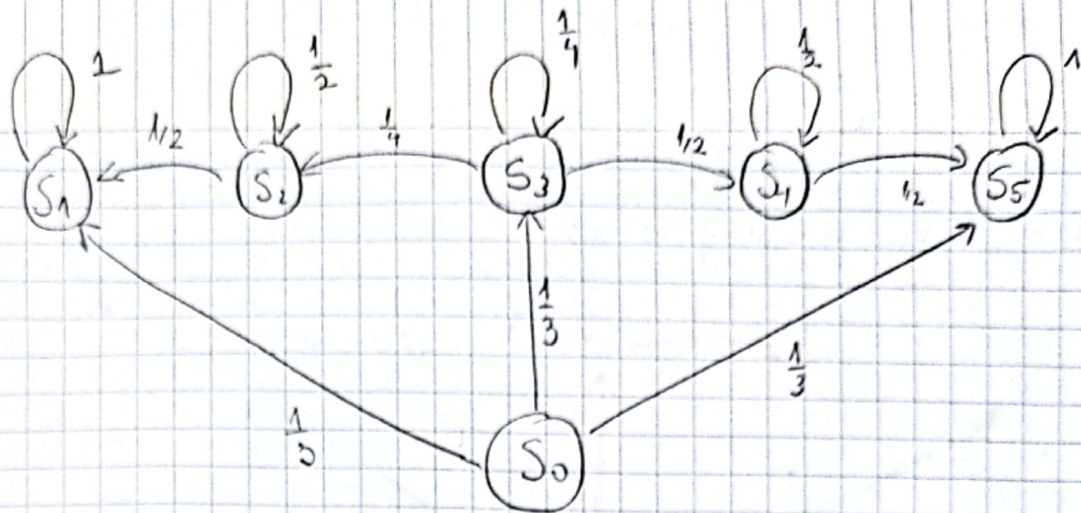
4,5
Пример у средњем веку Харвард, Јорџтаун и Јејл су имали само мушкарци. 80% анкова мушкараца са Харварда, похађали су ипак же Харвард, а остали Јејл. 40% анкова мушкараца са Јејла ишли су на Јејл, а остали Јорџтаун. Анкви мушкараца са Јорџтаунда су у 70% уписивали Јорџтаун, њих 20% ишли су на Харвард, а 10% на Јејл. Моделовање овеу ситуацију М. ланцем.



р да упуку ипак же
 похађа Харвард?

$$p = 0.8^2 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.7$$

задача 3



а) Определить P на n -м шаге унази у (S_2) если идти из k -шага

формула - A_k

$$\begin{aligned}
 p_{02}(k) &= p_{02}(k-1) \cdot \frac{1}{4} \quad , \quad k \geq 2 \\
 &= p_{02}(1) \cdot p_{22}(k-2) \cdot \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot p_{22}(k-2) \cdot \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

$$P(A_k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \quad k \geq 2$$

б) Определить P на n -м шаге унази у (S_2) если идти

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \dots \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) = \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k
 \end{aligned}$$

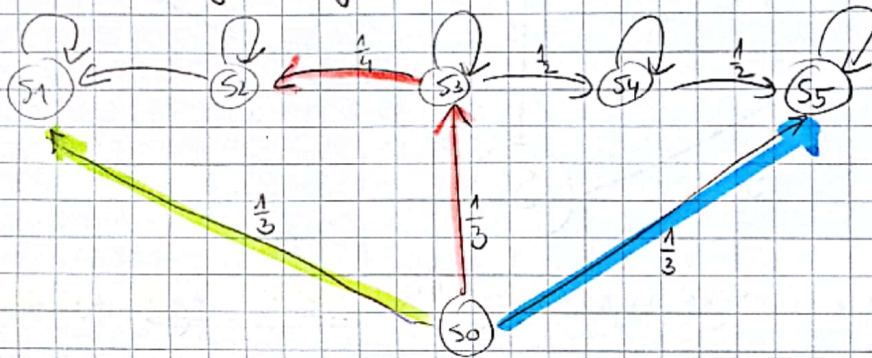
$a > 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k &= \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k &= \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{9}$$

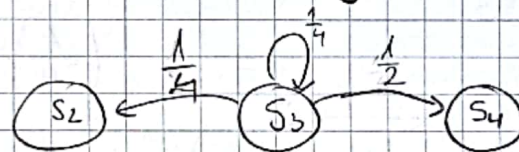
б) Определите P, что процесс никогда не уйдет из состояния S_4

$B = \text{"процесс унази у } S_2 \text{ и } S_3"$



$$\begin{aligned} P(S_4) &= P(\leftarrow) + P(\uparrow) + P(\rightarrow) \\ &= P(\leftarrow) + P(B) + P(\rightarrow) \\ &= P(\leftarrow) + P(A) + P(\rightarrow) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

в) Найдите P, что процесс никогда не уйдет из состояния S_3



$$\begin{aligned} P(3 \rightarrow 2 \mid \text{промена ситая}) &= P(3 \rightarrow 2 \mid 3 \rightarrow 2 \text{ или } 3 \rightarrow 4) \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ако се летна ситая, тада је ново ситие ②

$$\Rightarrow P(A) = P_{03} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

г) Определите P, что процесс унази у (S_2) и никогда не уйдет из первого корня

$$P = P_{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

д) процесс унази у (S_1) или у (S_2) и никогда не уйдет из первого корня

$$P = P_{03} \cdot P_{32} \cdot P_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

Пример Смит је у заводу и има 3\$. Излази из завода ако има 8\$.

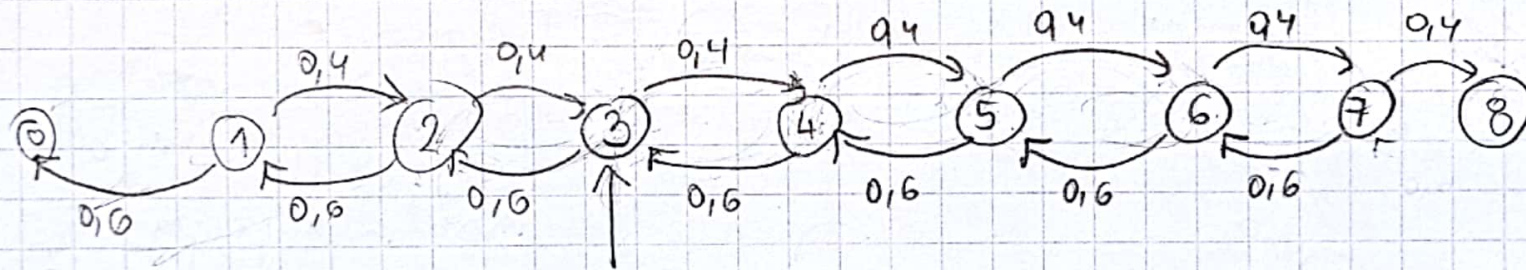
Увек прилази на крајеве са Смитом. Ако Смит уложи 1\$, он има

шансу 0,4 да добије 1\$ са вероватноћом 0,4, а да добије 0\$ са вероватноћом 0,6.

Ако је X_n ^{стање} број новца који поседује Смит у моменту n .

Питање: Смитов број новца ~~је~~ Марковски процес?

а) Смит се кради до 1 долар сваког пута.



7 питање: Ако Смит све да се кради само 7 пута, да

ли је лепа шанса да изађе из завода или да остане без

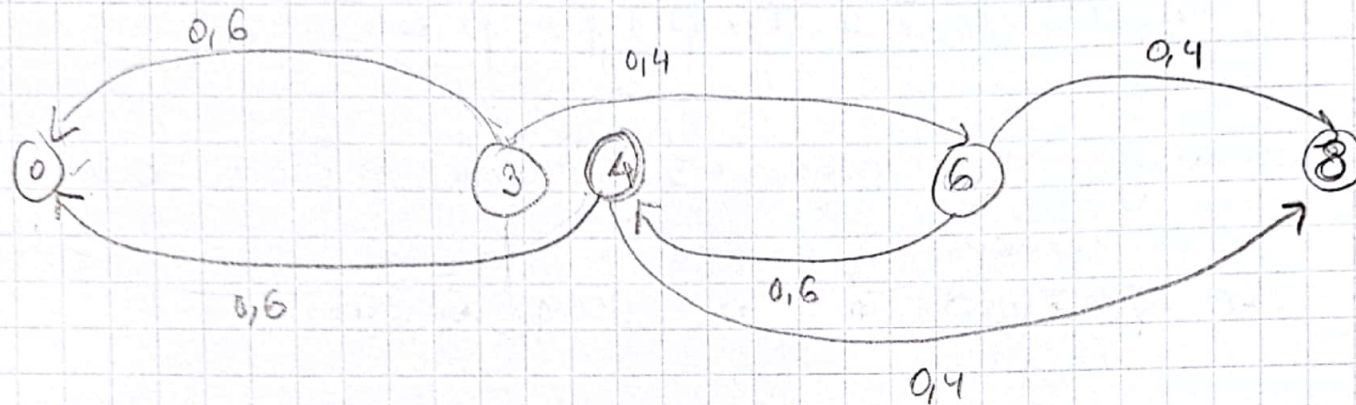
новца?

$$P_{38} = P_{38}(5) + P_{38}(7) = 0,4^5 + (0,4 \cdot 0,6) \cdot 0,4^5 + \dots + \dots + \dots$$

$$= 0,4^5 + 5(0,4 \cdot 0,6) \cdot 0,4^5 = \dots (X)$$

$$P_{30} = P_{30}(3) + P_{30}(5) + P_{30}(7) = 0,6^3 + 0,6^3(0,6 \cdot 0,4) \cdot 3 + \dots = y$$

8) Какав је највише шанса што је били могуће постоја, али не били су отица
што му је подредно да досадише 8.

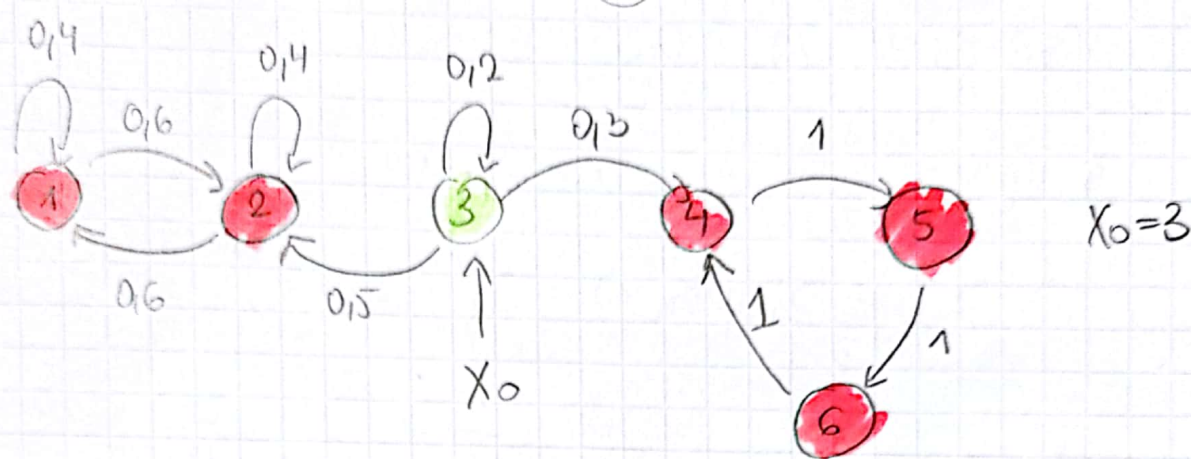


Која је вероватноћа за стиги изјаву саб рибар?

$$p = p_{30} = p_{30}(1) + p_{30} \cdot p_{64} \cdot p_{40} = 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,744$$

Која је вероватноћа за стиги изјаву зашлора?

$$p = p_{36} p_{68} + p_{30} \cdot p_{64} \cdot p_{48} = 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,16 + 0,096 = 0,256$$



a) Која стања су рекурентна, транзитивна, перманентна

или ипак нешто, онда
 пишу кандидати
 за перманентност
 $\Rightarrow 4, 5, 6$ (3 групе!)

b) Наћи p да је процес у стању (3) после n корака

$$p = p_{33}(3) = 0,2^n$$

б) Наћи очекувани број корака до (уклучувајќи и) крајот на кога

процес најдупина стање 3, наћи раштуду за X .

$$p_{3 \rightarrow 1} = p_{32}(1) + p_{34}(1) = 0,15 + 0,3 = 0,45 = 0,45 \cdot (0,2)^0$$

$$p_{3 \rightarrow 2} = p_{32}(1) \cdot p_{32}(1) + p_{33}(1) \cdot p_{34}(1) = 0,2(0,15 + 0,3) = 0,2 \cdot 0,45$$

$$p_{3 \rightarrow 3} = p_{33}(2)(p_{32}(1) + p_{34}(1)) = 0,2^2 \cdot 0,45$$

X: број корака

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ (0,2)^0 \cdot 0,8 & (0,2)^1 \cdot 0,8 & (0,2)^2 \cdot 0,8 & (0,2)^3 \cdot 0,8 & \dots \\ (1-p) & p & & & \end{pmatrix}$$

$$p_X(x) = (0,2)^{x-1} \cdot 0,8$$

↑
геометријска расподела

$$E(X) = 0,8 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (0,2)^{k-1} \cdot k$$

$$= \dots = \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

b) p га процес никада не уђе у стање ①

A: процес улази у ①

$$p_{34}(k) = (0,2)^{k-1} \cdot 0,3$$

↑
по први пут?

B процес одлази на десно

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{34}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0,3 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{k-1} = 0,3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^k =$$

$$= 0,3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{8}$$

9) у апарату (4) Намом 10 коракка $p(x_{10}=4)$

$$\begin{aligned}
 p_{34}(10) &= p_{33}(9) \cdot p_{34}(1) + p_{34}(1) \cdot p_{45} \cdot p_{56} \cdot p_{64} \cdot p_{45} \cdot p_{56} \cdot p_{64} \cdot p_{45} \cdot p_{56} \cdot p_{64} \\
 &+ p_{33}(3) \cdot p_{34}(1) \cdot p_{64} \cdot p_{45} \cdot p_{56} \cdot p_{64} \cdot p_{45} \cdot p_{56} \\
 &+ p_{33}(6) \cdot p_{34}(1) \cdot p_{64} \cdot p_{45} \cdot p_{56} \\
 &= 0,2^9 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot (1)^3 + (0,2)^3 \cdot 0,3 \cdot (1)^2 + (0,2)^6 \cdot 0,3 \cdot 1 \checkmark \\
 &= 0,3024
 \end{aligned}$$

б) Ако знамо да је процес у (4) после 10 корака, наћи вероватноћу да је процес био у стању (4) после 1 корака.

$$P(X_1=4 \mid X_{10}=4) = \frac{P(X_1=4 \cap X_{10}=4)}{P(X_{10}=4)}$$

$$P(X_1=4 \cap X_{10}=4) = 0,3 \cdot (1) = \boxed{0,3}$$

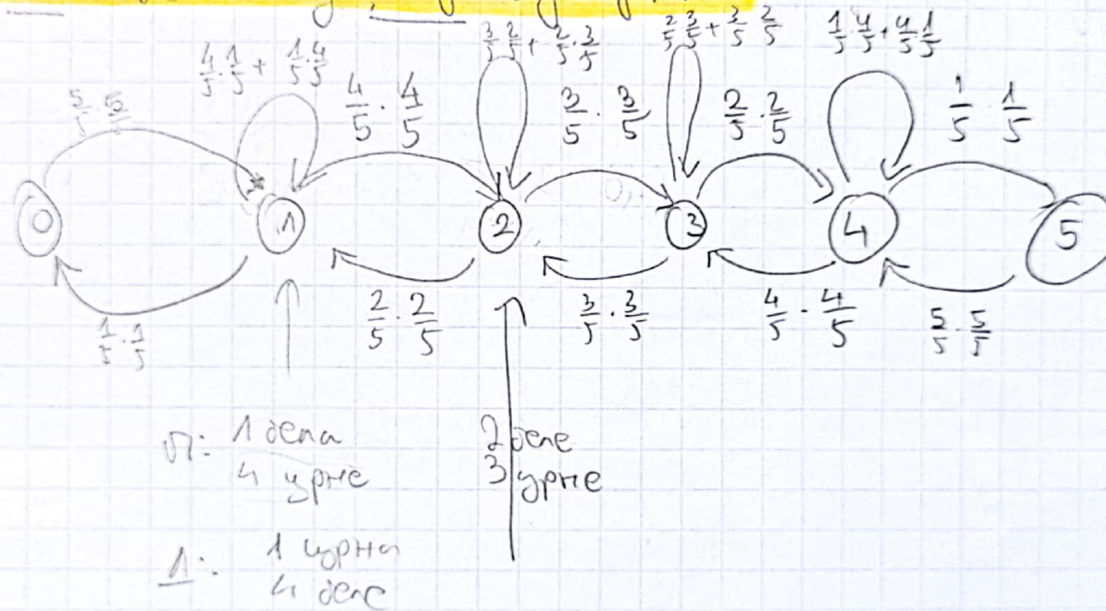
$3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$
 $\quad \quad \quad \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$
 $\quad \quad \quad \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$
10

$$= \frac{0,3}{0,3024} = 0,992$$

20.12.2019

5 белих пошта и 5 црних пошта равномерно је у 2 кутије: леву и десну. Свака садржи по 5 пошта. Играчи играју "Замена пошта" тако што у свакој кутији, у исто време, извучемо насумично по једну пошту из сваке кутије, и заменимо их.

а) Описати Марков процесом ову игру. Ненаведени адекватно одговарајући белх пошти у левој кутији.



б) Дати смо информацију о потенциалној другој игри: у левој се налазе 2 белх поште. Одредити вероватноћу да у левој кутији остане само црна пошта након 3 замена

$$p = p(2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0) + p(2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 0) = \dots$$