

INTEGRALI

Dvostruki integral

- **Definicija:**

Neka je D zatvorena oblast u ravni Oxy , na kojoj je definisana neprekidna funkcija $z = f(x, y)$. Podelimo oblast D na n elementarnih podoblasti D_i , $i = \overline{1, n}$, čije ćemo površine označiti sa ΔS_i . U svakoj podoblasti ΔS_i izaberimo tačku $M_i(x_i, y_i)$ i sastavimo sumu

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i,$$

koju ćemo zvati *integralnom sumom* za funkciju $f(x, y)$ u oblasti D .

Označimo sa d najveći od dijametara oblasti D_i . Tada ćemo pod činjenicom da $d \rightarrow 0$ smatrati usitnjavanje oblasti D na podoblasti D_i . Očigledno važi $d \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$.

Tada, zbog neprekidnosti funkcije $f(x, y)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ postoji nezavisno od razbijanja oblasti D i izbora tačaka M_i i njega zovemo *dvostrukim integralom funkcije $f(x, y)$ na oblasti D* i označavamo sa

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \quad \text{ili} \quad \int \int_D f(x, y) dS.$$

U tom slučaju za funkciju $f(x, y)$ kažemo da je *podintegralna funkcija* a za oblast D da je *oblast integracije*.

- **Geometrijska interpretacija:** Ako je $f(x, y) \geq 0$, tada $\int \int_D f(x, y) dx dy$ predstavlja zapreminu tela, ograničenog odozdo sa oblasti D , odozgo sa površi $z = f(x, y)$, a sa strane sa cilindričnom površi obrazovanoj rotacijom prave paralelne osi O_z duž granice oblasti D :

- **Osobine:**

1.

$$\int \int_D \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \int \int_D f(x, y) dx dy,$$

gde je α proizvoljna konstanta.

2.

$$\int_D \int (f(x, y) + g(x, y)) \, dx dy = \int_D \int f(x, y) \, dx dy + \int_D \int g(x, y) \, dx dy.$$

3. Ako su funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ neprekidne na oblasti D i ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, tada je

$$\int_D \int f(x, y) \, dx dy \leq \int_D \int g(x, y) \, dx dy.$$

4. Ako se oblast D može predstaviti kao unija dve oblasti D_1 i D_2 koje nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada je

$$\int_D \int f(x, y) \, dx dy = \int_{D_1} \int f(x, y) \, dx dy + \int_{D_2} \int f(x, y) \, dx dy.$$

• **Izračunavanje dvostrukog integrala:**

Pretpostavimo da se oblast D može predstaviti preko sistema nejednakosti:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Tada važi

$$\int_D \int f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Analogno, neka je oblast D zadata sa:

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}.$$

Tada važi

$$\int_D \int f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx.$$

- **Smena promenljivih kod dvostrukog integrala:**

Posmatraćemo dvostruki integral

$$\int\int_D f(x, y) dx dy$$

u pravougaonom koordinatnom sistemu (x, y) . Pretpostavimo da se promenljive x i y mogu predstaviti kao funkcije dve promenljive u i v , tj. $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$, pri čemu su te funkcije neprekidne, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda, na nekoj zatvorenoj oblasti G ravni Ouv . Pretpostavimo takodje da te funkcije jednoznačno preslikavaju oblast G na oblast D . Tada važi:

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int\int_G f[x(u, v), y(u, v)] \cdot |J(u, v)| du dv,$$

gde je

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jakobijan preslikavanja G u D . Koordinate (u, v) nazivaju se *krivolinijske koordinate* tačke (x, y) .

Najvažniji slučaj krivolinijskih koordinata su takozvane polarne koordinate koje se zadaju formulama $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, ($\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Jakobijan je u tom slučaju jednak ρ . Prema tome važi

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int\int_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

- **Primena dvostrukog integrala:**

1. Ako je D ograničena oblast ravni Oxy tada se njena površina računa po formuli

$$S = S(D) = \int\int_D dx dy.$$

2. Kao što smo već napomenuli, zapremina tela, ograničenog odozdo sa oblasti D , odozgo sa površi $z = f(x, y)$, a sa strane sa cilindričnom

površi obrazovanoj rotacijom prave paralelne osi O_z duž granice oblasti D , računa se po formuli

$$V = \int \int_D f(x, y) dx dy.$$

• **Zadaci:**

1. Izračunati

$$\int \int_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy,$$

gde je $D = \{(x, y), 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Rešenje:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Izračunati

$$\int \int_D (x + 2y) dx dy,$$

gde je D unutrašnjost trougla sa temenima u tačkama $A(0, 0)$, $B(1, 2)$ i $C(3, 0)$.

Rešenje: $I = I_1 + I_2 = 8$ gde su

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{2x} (x + 2y) dy, \quad I_2 = \int_1^3 dx \int_0^{3-x} (x + 2y) dy.$$

3. Izračunati

$$\int \int_D x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dx dy,$$

gde je D oblast definisana relacijama $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rešenje:

$$I = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dy = \frac{4}{135}.$$

4. Izračunati

$$\int_D \int (xy - 2x + 3y) dx dy,$$

gde je D oblast ograničena krivim $y = \sqrt{x}$ i $y = x^3$.

Rešenje:

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} (xy - 2x + 3y) dy = \frac{403}{1680}.$$

5. Izračunati

$$\int_D \int (2x - 3y) dx dy,$$

gde je D unutrašnjost kruga $x^2 + y^2 = 16$ u I kvadrantu.

Rešenje: Polarne koordinate:

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, J = \rho,$$

$$I = \int_0^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\rho \cos \phi - 3\rho \sin \phi) \rho d\phi = -\frac{64}{3}.$$

6. Izračunati

$$\int_D \int (2x - 3y + 4) dx dy,$$

gde je D unutrašnjost elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Rešenje: $x = 2\rho \cos \phi, y = 3\rho \sin \phi, J = 6\rho,$

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho \cos \phi - 3\rho \sin \phi + 4) \rho d\phi = 24\pi.$$

7. Izračunati

$$\int_D \int (x^2 + y^2)^2 dx dy,$$

gde je D unutrašnjost kruga $x^2 + y^2 = 2y$.

Rešenje: $x = \rho \cos \phi, y = 1 + \rho \sin \phi, J = \rho,$

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (\rho^2 + 2\rho \sin \phi + 1)^2 \rho d\phi = \frac{10\pi}{3}.$$

8. Izračunati zapreminu tela ograničenog eliptičkim cilindrom $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ i ravnima $z = 12 - 3x - 4y$, $z = 1$.

Rešenje: $x = 2\rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $J = 2\rho$,

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (11 - 3\rho \cos \phi - 4\rho \sin \phi) 2\rho d\phi = 22\pi.$$

9. Izračunati zapreminu tela ograničenog površima $(x - 1)^2 + y^2 = z$ i $2x + z = 2$.

Rešenje: Eliminacijom z iz jednačina površi dobijamo $x^2 + y^2 = 1$. Uvodjenjem polarnih koordinata dobijamo da je

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

10. Izračunati zapreminu tela ograničenog kružnim cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$ i ravnima $z = x$, $z = 3x$.

Rešenje: $x = \rho \cos \phi + 1$, $y = \rho \sin \phi$, $J = \rho$,

$$V = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (2 + 2\rho \cos \phi) \rho d\phi = 2\pi.$$

Trostruki integral

- **Definicija:**

Neka je V zatvorena oblast u prostoru $Oxyz$, na kojoj je definisana neprekidna funkcija $u = f(x, y, z)$. Podelimo oblast V na n elementarnih podoblasti čije ćemo zapremine označiti sa Δv_i . U svakoj podoblasti izaberimo tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$ i sastavimo sumu

$$m_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i,$$

koju ćemo zvati *integralnom sumom* za funkciju $f(x, y, z)$ u oblasti V .

Kao i kod dvostrukog integrala, zbog neprekidnosti funkcije $f(x, y, z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ postoji nezavisno od razbijanja oblasti V i izbora tačaka M_i i njega zovemo *trostrukim integralom funkcije $f(x, y, z)$ na oblasti V* i označavamo sa

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{ili} \quad \int \int \int_V f(x, y, z) dv.$$

Osobine trostrukog integrala su potpuno analogne odgovarajućim osobinama kod dvostrukih integrala.

- **Izračunavanje trostrukog integrala:**

Pretpostavimo da se oblast V može predstaviti preko sistema nejednakosti

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Tada važi

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

- **Smena promenljivih kod trostrukog integrala:**

Kao kod dvostrukog integrala važi sledeća formula:

$$I = \int \int \int_V f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J(u, v, w)| du dv dw,$$

gde je

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

i gde smo sa I označili $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

Navešćemo neke važne slučajeve transformacija koordinata kod trostrukih integrala:

Sferne koordinate:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi, \quad J = \rho^2 \sin \phi,$$

Cilindrične koordinate:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z, \quad J = \rho,$$

• **Primena trostrukog integrala:**

Zapremina tela V se računa po formuli

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

• **Zadaci:**

1. Izračunati

$$\iiint_V x dx dy dz,$$

gde je V oblast u prvom oktantu ograničena sa ravni $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.

Rešenje:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}} x dz = \frac{67}{512}.$$

2. Izračunati

$$\iiint_V xy dx dy dz,$$

gde je V oblast ograničena hiperboličnim paraboloidom $z = xy$ i rav-
nima $x + y = 1$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

Rešenje:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} xy dz = \frac{1}{180}.$$

3. Izračunati

$$\int \int \int_V (x + y - 2z + 1) dx dy dz,$$

gde je V deo lopte $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ u prvom oktantu.

Rešenje: Sferne koordinate:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi, J = \rho^2 \sin \phi,$$

$$I = \int_0^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho, \phi) \rho^2 \sin \phi d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

4. Izračunati

$$\int \int \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

gde je V oblast koju ograničava elipsoid $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$.

Rešenje:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = 2\rho \cos \phi, J = 2\rho^2 \sin \phi,$$

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) \rho^2 \sin \phi d\theta = \frac{16\pi}{3}.$$

5. Izračunati

$$\int \int \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

gde je V oblast ograničena konusom $x^2 + y^2 = z^2$ i sa ravni $z = 1$.

Rešenje: Cilindrične koordinate:

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z, J = \rho,$$

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^z f(\rho, \phi) \rho d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

6. Izračunati zapreminu tela koje ograničavaju paraboloidi $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, cilindrična površ $y = x^2$ i ravan $y = x$.

Rešenje:

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \frac{3}{35}.$$

Krivolinijski integral I vrste

- **Definicija:**

Neka je u svakoj tački glatke krive $L = AB$ u ravni Oxy zadata neprekidna funkcija dve promenljive $f(x, y)$. Podelimo krivu L na n delova tačkama $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$. Na svakom od delova krive $\overline{M_{i-1}M_i}$ izaberimo tačku $\overline{M_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ i sastavimo sumu

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i,$$

gde je Δl_i dužina dela $\overline{M_{i-1}M_i}$. Dobijena suma se naziva *integralnom sumom prvog reda* za funkciju $f(x, y)$, zadanu na krivoj L .

Označimo sa d maksimalnu dužinu lukova $\overline{M_{i-1}M_i}$, tj. neka je $d = \max_i \Delta l_i$. Zbog neprekidnosti funkcije $f(x, y)$ postoji granična vrednost integralnih suma S_n (kada $d \rightarrow 0$), koja ne zavisi od podele krive L na delove i izbora tačaka M_i i ona se zove *krivolinijski integral prve vrste* funkcije $f(x, y)$ po krivoj L i označava sa

$$\int_L f(x, y) dl \quad \text{ili} \quad \int_{AB} f(x, y) dl.$$

- **Osobine:**

Osobine krivolinijskog integrala prve vrste su analogne odgovarajućim osobinama kod dvostrukih i trostrukih integrala integrala uz jednu novu osobinu:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl,$$

tj., krivolinijski integral prve vrste ne zavisi od pravca integracije.

- **Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste:**

Neka je kriva L zadata neprekidno-diferencijabilnom funkcijom $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Tada važi:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Neka je kriva L zadata parametarskim jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Tada važi:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

• **Zadaci:**

1. Izračunati

$$\int_l \frac{x}{y} ds$$

gde je l luk parabole $y^2 = 2x$ između tačkaka $(2, 2)$ i $(8, 4)$.

Rešenje: $I = \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$.

2. Izračunati

$$\int_l (x^2 + y^3) ds$$

gde je l trougao sa temenima u tačkama $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ i $O(0, 0)$.

Rešenje: $I = \frac{7\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7(\sqrt{2}+1)}{12}$.

3. Izračunati

$$\int_l y^2 ds$$

gde je l luk cikloide $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Rešenje:

$$I = 64 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = \frac{2048}{15}.$$

4. Izračunati

$$\int_l \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

gde je l kriva zadata parametarskim jednačinama $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Rešenje:

$$I = \int_0^{2\pi} t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{3} [(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

5. Izračunati

$$\int_l (x^2 + y^2) ds$$

gde je l krug $x^2 + y^2 = ax$, ($a > 0$).

Rešenje:

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, I = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Krivolinijski integral II vrste

- **Definicija:**

Neka je $l = AB$ glatka kriva i neka je $P(x, y)$ neprekidna funkcija definisana u tačkama krive L . Podelimo krivu l na n delova tačkama $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$. Na svakom od delova krive $\overline{M_{i-1}M_i}$ izaberimo tačku $\overline{M_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ i sastavimo proizvod

$$P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i,$$

gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Formirajmo sumu

$$S_{n,x} = \sum_{i=1}^n P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i,$$

koja se naziva *integralnom sumom drugog reda* za funkciju $P(x, y)$ po koordinati x .

Označimo sa d maksimalnu dužinu lukova $\overline{M_{i-1}M_i}$. Zbog neprekidnosti funkcije $P(x, y)$ postoji granična vrednost integralnih suma $S_{n,x}$ (kada $d \rightarrow 0$), koja ne zavisi od podele krive l na delove i izbora tačaka M_i i ona se zove *krivolinijski integral druge vrste* funkcije po koordinati x i označava sa

$$\int_l P(x, y) dx.$$

Potpuno analogno se definiše i *krivolinijski integral druge vrste* funkcije $Q(x, y)$ po koordinati y , koji se označava sa

$$\int_l Q(x, y) dy,$$

gde je $Q(x, y)$ neka neprekidna funkcija.

Zbir krivolinijskih integrala

$$\int_l P(x, y) dx \quad \text{i} \quad \int_l Q(x, y) dy,$$

se naziva *krivolinijski integral druge vrste* i označava se sa

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

- **Osobine:**

Osobine krivolinijskog integrala druge vrste su analogne odgovarajućim osobinama kod dvostrukih i trostrukih integrala. Specijalno, važi osobina

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

tj., krivolinijski integral druge vrste menja znak pri izmeni pravca integracije.

- **Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste:**

Neka je kriva L zadata neprekidno-diferencijabilnom funkcijom $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Tada važi:

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx.$$

Neka je kriva L zadata parametarskim jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Tada važi:

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

- **Grinova formula:**

Neka su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ funkcije neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda i neka kriva L ograničava zatvorenu oblast D . Tada važi:

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

- **Zadaci:**

1. Date su tačke $A(3, 6)$, $B(3, 0)$ i $C(0, 6)$. Izračunati

$$\int_l (8x + 4y + 2) dx + (8y + 2) dy$$

gde je l :

a) Odsečak OA .

b) Izlomljena linija OBA .

c) Izlomljena linija OCA .

d) Parabola, simetrična u odnosu na osu Oy , koja prolazi kroz O i A .

Rešenje: a) $I = 234$; b) $I = 198$; c) $I = 270$; d) $y = \frac{2}{3}x^2$, $I = 222$.

2. Izračunati

$$\int_l \frac{y}{1+x} dx + x dy$$

gde je l luk krive $y = 2\sqrt{x} - x$ u prvom kvadrantu.

Rešenje: $I = 2I_1 - I_2 + I_3 = \frac{4}{3} - 4 \operatorname{arctg} 2 + \ln 5$ gde su:

$$I_1 = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 4 - 2 \operatorname{arctg} 2, \quad (\text{smena } \sqrt{x} = t),$$

$$I_2 = \int_0^4 \frac{x}{1+x} dx = 4 - \ln 5,$$

$$I_3 = \int_0^4 (\sqrt{x} - x) dx = -\frac{8}{3}.$$

3. Izračunati

$$\int_l (2a - y) dx - (a - y) dy$$

gde je l prvi svod cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Rešenje:

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin t \cos t) dt = \pi a^2.$$

4. Izračunati

$$\int_l (3xy - 2x^2) dx + (4xy - 2y^2) dy$$

gde je l zatvorena kriva koja se sastoji od delova krivih $y = x^3$ i $y = \sqrt[3]{x}$.

Rešenje.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} (4y - 3x) dy = \frac{8}{35}.$$

5. Izračunati

$$\int_l (x^2 - 3xy) dx + (xy + 2y^3) dy$$

gde je l elipsa $(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$.

Rešenje. $x = 1 + \rho \cos \phi$, $y = 2 + 4\rho \sin \phi$, $J = 4\rho$,

$$I = 4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (5 + 4\rho \sin \phi + 3\rho \cos \phi) \rho d\rho = 20\pi.$$

6. Izračunati

$$\int_l (x^2 + 2y^2 - y) dx + (2 + x - x^2) dy$$

gde je l elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Rešenje. $x = 2\rho \cos \phi$, $y = 3\rho \sin \phi$, $J = 6\rho$,

$$I = 6 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (2 - 4\rho \cos \phi - 12\rho \sin \phi) \rho d\rho = 12\pi.$$

7. Izračunati

$$\int_l (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$$

gde je l kriva $x^2 + y^2 = 3x$.

Rešenje. $x = \frac{3}{2} + \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $J = \rho$,

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{3}{2}} (\rho \sin \phi - \frac{3}{2} - \rho \cos \phi) \rho d\rho = -\frac{27\pi}{8}.$$

8. Izračunati

$$\int_l 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$$

gde je l trougao sa temenima u tačkama $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ i $C(1, 3)$.

Rešenje.

$$I = 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y) dy = -\frac{4}{3}.$$

9. Izračunati

$$\int_l (2x - 3y) dx + (x^2 - xy) dy$$

gde je l deo krive $y = \sqrt{4 - x}$ u prvom kvadrantu.

Rešenje.

$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} (2x - y + 3) dy - 16 = \frac{196}{15}.$$

Površinski integral I vrste

- **Definicija:**

Neka je zadata neprekidna funkcija $f(x, y, z)$ na nekoj glatkoj površi S . Posmatraćemo razbijanje površi S na delove S_1, S_2, \dots, S_n , čije su površine $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ i čiji su dijometri d_1, d_2, \dots, d_n . Na svakom delu S_i izaberimo tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$ i sastavimo sumu

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i,$$

koja se naziva *integralnom sumom prvog reda* za funkciju $f(x, y, z)$.

Tada, zbog neprekidnosti funkcije $f(x, y, z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ postoji nezavisno od razbijanja površi S i izbora tačaka M_i i njega zovemo *površinskim integralom prve vrste* i označavamo sa

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma.$$

Definicija površinskog integrala prve vrste je analogna definiciji krivolinijskog integrala prve vrste pa su i osobine površinskog integrala prve vrste analogne odgovarajućim osobinama krivolinijskog integrala prve vrste.

- **Izračunavanje površinskog integrala prve vrste:**

Neka je površ S zadata na oblasti D ravni Oxy funkcijom $z = z(x, y)$, pri čemu je funkcija $z(x, y)$ neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodima z'_x i z'_y . Tada važi:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Neka je površ S zadata parametarskim jednačinama $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, gde su funkcije x, y, z neprekidno-diferencijabilne na nekoj oblasti G ravni Ouv . Tada važi:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EH - F^2} dudv,$$

gde su

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad H = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

i

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

• **Zadaci:**

1. Izračunati

$$\iint_S \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3},$$

gde je S deo ravni $x + y + z = 1$ u prvom oktantu.

Rešenje.

$$I = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

2. Izračunati

$$\iint_S \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2},$$

gde je S deo ravni $x + y + z = 1$ u prvom oktantu.

Rešenje. $I = \sqrt{3}(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

3. Izračunati

$$\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma,$$

gde je S deo sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ u prvom oktantu.

Rešenje.

$$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi,$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Površinski integral II vrste

- **Definicija:**

Neka je S glatka orijentisana površ na kojoj je zadana neprekidna funkcija $R(x, y, z)$. Izaberimo onu stranu S^+ površi S zakoju je ugao između jediničnog vektora normale i ose Oz oštar. Posmatraćemo razbijanje površi S na delove S_1, S_2, \dots, S_n i čiji su dijametri d_1, d_2, \dots, d_n . Označimo sa $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_N$ površine odgovarajućih projekcija delova S_1, S_2, \dots, S_n na ravan Oxy . Na svakom delu S_i izaberimo tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$ i sastavimo sumu

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta P_i,$$

koja se naziva *integralnom sumom drugog reda* za funkciju $R(x, y, z)$. Tada, zbog neprekidnosti funkcije $R(x, y, z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ postoji nezavisno od razbijanja površi S i izbora tačaka M_i i njega zovemo *površinskim integralom druge vrste* funkcije $R(x, y, z)$ i označavamo sa

$$\int \int_{S^+} R(x, y, z) \, dx dy.$$

Analogno se definišu i površinski integrali

$$\int \int_{S^+} P(x, y, z) \, dy dz$$

i

$$\int \int_{S^+} Q(x, y, z) \, dx dz,$$

gde su $P(x, y, z)$ i $Q(x, y, z)$ neprekidne funkcije. Suma tri pomenuta integrala se naziva *opštim površinskim integralom druge vrste* i označavamo sa

$$\int \int_{S^+} P(x, y, z) \, dy dz + Q(x, y, z) \, dx dz + R(x, y, z) \, dx dy.$$

- **Izračunavanje površinskog integrala druge vrste:**

Neka je površ S zadata na oblasti D ravni Oxy funkcijom $z = z(x, y)$. Tada važi:

$$\int \int_{S^+} R(x, y, z) dx dy = \int \int_D R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Analogno se izračunavaju i površinski integrali

$$\int \int_{S^+} P(x, y, z) dy dz$$

i

$$\int \int_{S^+} Q(x, y, z) dx dz.$$

Ako su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ neprekidne i ako je pravac normale površi S određen vektorom $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, tada važi:

$$\int \int_{S^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \int \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

- **Stoksova formula:**

Ako su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda na površi S i ako je C zatvorena kriva koja ograničava površ S , tada važi:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int \int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma,$$

gde je $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ vektor pravca normale površi S .

- **Formula Gausa-Ostrogradskog:**

Ako su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda na zatvorenoj oblasti T , ograničenoj sa zatvorenom površi S , tada važi:

$$\int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \int_T \int \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

• **Zadaci:**

1. Izračunati

$$\int_S z dx dy + x dx dz + y dy dz,$$

gde je S spoljašnji deo ravni $x + y + z = 1$.

Rešenje.

$$\int_S z dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{1}{6}.$$

Slično se dobija da je i

$$\int_S x dx dz = \int_S y dy dz = \frac{1}{6},$$

pa je traženi integral jednak $\frac{1}{2}$.

REDOVI

Numerički redovi

- **Definicija:**

Neka je $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ dati niz realnih brojeva. Pod numeričkim redom podrazumevamo beskonačnu sumu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Brojevi a_i se nazivaju *članovi reda* a a_n je *opšti član*. Sumu prvih n članova označavaćemo sa S_n i zvaćemo *n-tom parcijalnom sumom*.

Za red kažemo da je *konvergentan* ako niz njegovih parcijalnih suma konvergira ka konačnom broju S kad $n \rightarrow \infty$ i broj S zovemo *sumom reda*. Ako niz parcijalnih suma reda ne konvergira ka konačnom broju, tada za red kažemo da je *divergentan*.

- **Kriterijumi konvergencije:**

Teorema 1. Neka red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i neka je njegova suma jednaka S . Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konvergira i njegova suma je jednaka αS .

Teorema 2. Neka redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju i neka su njihove sume jednake S_1 i S_2 . Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergira i njegova suma je jednaka $S_1 + S_2$.

Teorema 3. Neka red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Teorema 4. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka $(\exists n_0)(\forall n)n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$. Tada:

1) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Teorema 5. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad (c \neq 0, \pm\infty).$$

Tada:

1) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

2) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Teorema 6 (D'alambertov kriterijum). Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima i neka je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Tada:

- 1) Ako je $l > 1$ tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- 2) Ako je $l < 1$ tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- 3) Ako je $l = 1$ tada se za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne može tvrditi ni da konvergira ni da divergira.

Teorema 7 (Košijev kriterijum). Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima i neka je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Tada:

- 1) Ako je $l > 1$ tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- 2) Ako je $l < 1$ tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- 3) Ako je $l = 1$ tada se za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne može tvrditi ni da konvergira ni da divergira.

Teorema 8 (Integralni kriterijum). Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima za koji postoji pozitivna, neprekidna i monotono-opadajuća funkcija, definisana na intervalu $[1, \infty)$, takva da je $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$. Tada:

- 1) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergira.
- 2) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira ako i samo ako integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergira.

• **Alternativni redovi:**

Red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in N$, se naziva alternativni red.

Teorema 1 (Lajbnicov kriterijum). Neka je:

- 1) $a_n > a_{n+1}$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

Teorema 2. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

• **Zadaci:**

1. Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ za sledeće redove i ispitati konvergenciju:

a)

$$1 + 2 + 3 \dots + n + \dots$$

b)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Rešenje: a) $S = \infty$; b) $S = 1$.

2. Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ za sledeće redove:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\ln(n+1)}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$$

Rešenje: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n + 1}{n^2}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 1}{2^n}$$

Rešenje: Primenjujemo teoremu 4: a) $\frac{2+\sin n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pa red divergira.

b) $\frac{\operatorname{arctg} n + 1}{n^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{n^2}$ pa red konvergira. c) $\frac{5^n + 1}{2^n} \geq \frac{5^n}{2^n}$ pa red divergira.

4. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n}-2}.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n + \sqrt[3]{n^5}}.$$

Rešenje: Primenjujemo teoremu 5: a) Podelimo opšti član sa $\frac{1}{n}$ pa dobijamo da red divergira. b) Podelimo opšti član sa $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ pa dobijamo da red konvergira. c) Podelimo opšti član sa $\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ pa dobijamo da red divergira.

5. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^{n+1}}.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}.$$

Rešenje: Primenjujemo teoremu 6: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ pa red konvergira. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ pa red divergira. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ pa red konvergira. d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ pa red konvergira.

6. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{3n+1}.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

Rešenje: Primenjujemo teoremu 7: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{8}$ pa red konvergira. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e^2}$ pa red konvergira. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$ pa red konvergira.

7. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

Rešenje: Primenjujemo teoremu 8: a) $\int_2^{\infty} f(x) dx = \infty$ pa red divergira. b) $\int_2^{\infty} f(x) dx = \infty$ pa red divergira. c) $\int_1^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\ln 2}$ pa red konvergira.

8. Ispitati konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Rešenje: Lako je videti da uslovi 1) i 2) iz teoreme 1 važe i alternativni red konvergira. Pored toga red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ divergira, jer je

$$\frac{1}{2\sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

pa primenjujemo teoremu 4. Prema tome red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ uslovno konvergira.

9. Ispitati konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n - \ln n}.$$

Rešenje: Uslovi 1) i 2) iz teoreme 1 za alternativne redove važe pa red konvergira. Primenimo teoremu 5 za ispitivanje apsolutne konvergencije. Kada podelimo a_n sa $\frac{1}{n}$, dobijamo da red ne konvergira apsolutno pa imamo da alternativni red uslovno konvergira.

Stepeni redovi

• Definicija i osnovni pojmovi:

Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

gde su $a, a_1, a_2 \dots$ realni brojevi se naziva stepeni red.

Teorema (Abel). Ako stepeni red konvergira za $x = x_0$ tada on konvergira i za sve $|x - a| < |x_0 - a|$.

Posledica ove teoreme je postojanje intervala konvergencije $|x - a| < R$ sa centrom u a unutar koga stepeni red apsolutno konvergira a van koga divergira. Broj R se zove poluprečnik konvergencije i može se naći po formulama

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ili} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Stepeni redovi se mogu diferencirati i integraliti član po član i pri tome je poluprečnik konvergencije tako dobijenih redova isti kao poluprečnik

konvergenije polaznog reda. Dakle važi, ako je $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, tada je

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1},$$

i

$$\int_a^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

• **Zadaci:**

1. Naći poluprečnik konvergenije sledećih stepenih redova i ispitati konvergenciju u krajevima intervala.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} \cdot (x+1)^n}{n^n}.$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n \cdot (n+2)}.$$

d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} \cdot n \ln^3 n}.$$

Rešenje: a) $R = 0$. b) $R = \infty$. c) $R = 3$. Za $x = -1$ red konvergira po teoremi 1 (za alternativne redove). Za $x = 5$ red divergira po teoremi 5 (podelimo a_n sa $\frac{1}{n}$). d) $R = 3$. Za $x = -8$ red apsolutno konvergira po teoremi 8 pa zaključujemo da konvergira. Za $x = -2$ red konvergira po teoremi 8.

Tejlorov i Maklorenov red

Tejlorova formula:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Maklorenova formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Maklorenov red nekih funkcija:

$x \in (-\infty, +\infty)$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$x \in (-\infty, +\infty)$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

$x \in (-\infty, +\infty)$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$x \in (-1, 1]$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

$x \in (-1, 1)$ **za** $m \leq -1$:

$$(1+x)^m =$$

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n.$$

• **Zadaci:**

1. Funkciju e^{-x^2} razviti u Maklorenov red.

Rešenje:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}.$$

2. Funkcije a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ razviti u Maklorenov red.

Rešenje: Naci im izvode, razviti ih u red a zatim integraliti član po član. a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

3. Naći

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}.$$

Rešenje: 2.

4. Naći

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Rešenje: $\frac{1}{6}$.

5. Naći

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{tg} x + 2x^3}{x^5}.$$

Rešenje: 2; $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$

Furijeovi redovi