

- U kutiji se nalaze 2 bele i 4 crne kuglice. Na slučajan način, bez vraćanja biramo jednu za drugom dve kuglice. Neka su slučajne promenljive  $X$  i  $Y$  jednake broju belih kuglica u prvom, odnosno drugom izvlačenju.
  - $\boxed{3}$  Odrediti raspodele verovatnoća slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$ .
  - $\boxed{4}$  Odrediti dvodimenzionu raspodelu slučajne promenljive  $(X, Y)$  i upisati u tabelu sve  $p_{(X,Y)}(x, y)$
  - $\boxed{4}$  Odrediti raspodelu slučajnih veličina  $XY$  i  $X + Y$
  - $\boxed{3}$  Izračunati standardne devijacije  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$
  - $\boxed{4}$  Izračunati vrednost  $\frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_x \sigma_y}$  (koeficijent korelacije)
- $\boxed{15}$  Jedna fabrika proizvodi artikale, čiji prečnik ima raspodelu  $N(31.75, 0.04)$ . Ako su granice tolerancije 31.55 i 31.95, oceniti koliko će artikala biti odbačeno prilikom kontrole 10 000 artikala.
- Petar i Marija igraju igru osvajanja loptica. Postoje 4 loptice i one su rasporedjene u dve kutije: Petrovu kutiju i Marijinu kutiju. Oni na raspolaganju imaju jednu hvataljku kojom pokušavaju da prihvate po jednu lopticu iz tuđe kutije, pa da je prebace u svoju. Igra se završava kada jedan igrač prebaci sve loptice u svoju kutiju. Petar i Marija hvataljku koriste naizmenično. U jednom potezu igre, neki igrač pokušava hvataljkom da prihvati lopticu iz tuđe kutije, i ukoliko uspe da uhvati lopticu, prebacuje lopticu u svoju kutiju. Hvataljka je nezgodna, i verovatnoća da će njome uspeti da uhvati lopticu u jednom potezu igre je samo 0.6. Ukoliko igrač u tom potezu ne uspe da uhvati lopticu, ta loptica ostaje i dalje u toj kutiji, a hvataljku predaje drugom igraču. Sada je drugi igrač na potezu, koji pokušava isto - da hvataljkom uhvati lopticu iz tuđe kutije i prebaci je u svoju. Ne znamo na koji način su loptice rasporedjene u Petrovoj i Marijinoj kutiji na samom početku igre. Neka svakom stanju odgovara BROJ loptica koje se nalaze u kutiji u kojoj je hvataljka TRENUTNO.
  - $\boxed{3}$  Navesti u koja stanja se može preći iz stanja "1" i sa kojim verovatnoćama?
  - $\boxed{6}$  Opisati Markovljevom procesom ovu igru.
  - $\boxed{5}$  Odrediti verovatnoće prelazaka kroz stanja u Markovljevom procesu opisanom gore.
  - $\boxed{3}$  Dobili smo informaciju o početnom stanju: hvataljka se nalazi u kutiji gde je samo jedna loptica. Koja je verovatnoća da se igra završi u najviše pet poteza?

Rešenja na TMF-u u Beogradu septembar 2020.

A grupa

- $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
  - $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

$Y/X$	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$
<b>1</b>	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

  - $XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ .
  - $X + Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ .
  - $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{2/3}$
  - $\rho = -\frac{1}{3}$

- $X \sim N(31.75, 0.04)$   
 $p(31.55 < X < 31.95) = p(-1 < X^* < 1) = 0.6826$   
 odbačenih je 3174 artikala

- Može se preći u stanje "3" sa verovatnoćom 0.4, i u stanje "4" sa verovatnoćom 0.6
  - b), c) d)  $p = 0.6 + 0,4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0,4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0.6 = 0.7459$

