Drugi deo ispita iz Matematičke obrade eksperimentalnih podataka na TMF-u u Beogradu 03.09.2019. **A grupa**

1. Dve trake u fabrici proizvode odredjeni proizvod. Neka je X slučajna veličina koja predstavlja broj artikala proizvedenih na prvoj traci, a Y na drugoj. Raspodela dvodimenzione slučajne veličine (X, Y) odredjena je tablicom:

$Y \backslash X$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0.21	0.28	0.14	0.07
1	0.06	0.08	0.04	0.02
2	0.03	0.04	0.02	0.01

   a) $\boxed{3}$ Izračunati verovatnoću da prva traka proizvodi manje artikala od druge trake.
   b) $\boxed{3}$ Izračunati očekivane vrednosti slučajnih promenljivih X i Y.
   c) $\boxed{5}$ Ako znamo da danas prva traka radi uvek punim kapacitetom, odrediti današnju raspodelu za Y, a zatim i $E(Y|X = 3)$
   d) $\boxed{6}$ Odrediti $E(Y|X \geq 2)$ i $E(X|Y < 2)$.

2. Vek trajanja električne lampe ima normalnu raspodelu $X \sim N(100, 25)$ gde je njen očekivani vek meren u časovima.
   a) $\boxed{4}$ Naći verovatnoću da nova lampa istog tipa traje najmanje 105 časova.
   b) $\boxed{6}$ Ako je jedna lampa već izdržala 90 časova, kolika je verovatnoća da će izdržati još 15 časova?
   c) $\boxed{4}$ Odrediti broj časova x takav da verovatnoća da će lampa trajati kraće od x iznosi $p = 0.1492$.

3. Marko ima 4 kišobrana. Neki su mu kod kuće, a neki u kancelariji. Pretpostavimo da se Marko kreće samo od kuće ka kancelariji, i iz kancelarije ka kući. Ponese kišobran sa sobom, samo ukoliko pada kiša. Ukoliko ne pada kiša, ne nosi kišobran sa sobom nazad, nego ga ostavlja (kod kuće ili u kancelariji). Može se dogoditi da su svi kišobrani na jednoj lokaciji, da je Marko na drugoj, i ukoliko počne da pada kiša, a Marko mora da krene, tada Marko pokisne. Pretpostavimo da je p verovatnoća da će padati kiša. Ako svakom stanju odgovara BROJ kišobrana koji se nalaze na lokaciji gde je Marko TRENUTNO (ili kuća ili kancelarija), tada:
   a) $\boxed{3}$ Navesti u koje stanje se može preći iz stanja "0" i sa kojom verovatnoćom?
   b) $\boxed{6}$ Opisati Markovljevim lancem predstavljene tranzicije: odrediti moguća stanja i prelaske kroz njih. U ovom delu nije potrebno odrediti verovatnoće prelazaka.
   c) $\boxed{6}$ Odrediti verovatnoće prelazaka kroz stanja u Markovljevom procesu opisanom gore.
   d) $\boxed{4}$ Dobili smo informaciju o početnom stanju: Marko se nalazi na lokaciji gde je samo jedan kišobran. Koja je verovatnoća da će nakon 5 prelazaka, Marko pokisnuti samo jednom?

Rešenja na TMF-u u Beogradu 03.09.2019. **A grupa**

1. a) $p(X < Y) = 0.13$
   b) $E(X) = 1.1, E(Y) = 0.4$
   c) $Y|X = 3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$

   $E(Y|X = 3) = 0.4$
   d) $Y|X \geq 2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$

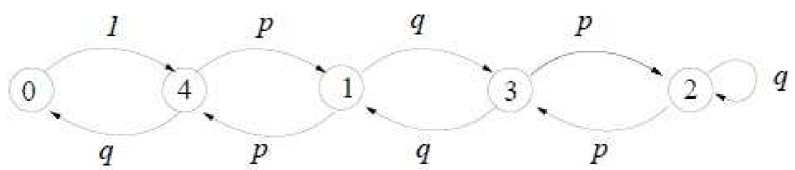
   $X|Y < 2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$

   $E(Y|X \geq 2) = 0.4$ i $E(X|Y < 2) = 1.1$.

   (Može se i pokazati da su X i Y nezavisne, pa im se zbog toga raspodele ne menjaju)

2. a) $p(X \geq 105) = 1 - 0.8413 = 0.1587$
   b) $p(X \geq 90) = \Phi(2) = 0.9772$
   $p(X \geq 105|X \geq 90) = \frac{p(X \geq 105 \bigcap X \geq 90)}{p(X \geq 90)} = 0.1624$
   c) $x = 94.8$

3. a) Ako se Marko nalazi u stanju "0", to znači da se u tom trenutku na NJEGOVOJ lokaciji nalazi 0 kišobrana, a na DRUGOJ lokaciji se u tom trenutku nalazi 4 kišobrana. Kada krene sa svoje lokacije, on kreće ka toj drugoj lokaciji na kojoj će ostati 4 kišobrana (jer, bez obzira da li pada kiša ili ne, on kod sebe nema kišobran koji bi mogao da ponese). Dakle, iz stanja "0" prelazi u stanje "4" sa verovatnoćom 1.
   b),c) Neka je $q = 1 - p$
   d) Pronaći sve puteve dužine 5, koji počinju u stanju "1",i sadrže prelazak iz stanja "0" u stanje "4" samo jednom,..



1
p
q
p
0
4
1
3
2
q
q
p
q
p