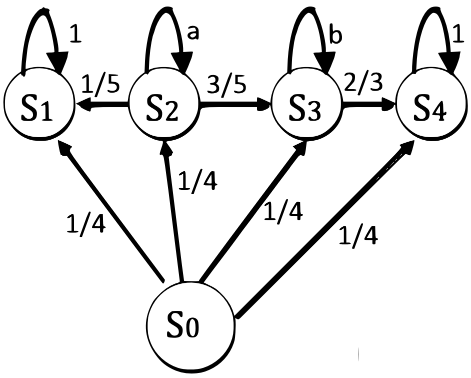
Drugi deo ispita iz Matematičke obrade eksperimentalnih podataka na TMF-u u Beogradu 03.12.2017. **A grupa**

1. Petostrana "kocka" sa oznakama *1, 2, 3, 4* i *5* se baca 2 puta. Neka je X slučajna veličina koja predstavlja broj dobijen u drugom bacanju, a neka Y označava minimum brojeva dobijenih u oba bacanja.
   a) $\boxed{6}$ Odrediti i upisati u tabelu sve $p_{X,Y}(x,y)$.
   b) $\boxed{3}$ Odrediti verovatnoću $p_Y(4)$
   c) $\boxed{5}$ Odrediti raspodele $p_{X|Y}(x|3)$ i $p_{Y|X}(y|4)$

2. Istraživača Marka interesuje koliko je ljudi prosečno zaposleno u tehnološkim firmama u Beogradu. Sa X_i on obeležava broj zaposlenih u i-toj tehnološkoj firmi, a pretpostavlja da su X_i nezavisne slučajne veličine sa identičnim raspodelama i očekivanjem e. Da bi procenio e, Marko bira nasumično n tehnoloških firmi iz Beograda i broji zaposlene u svakoj od njih.
   a) $\boxed{4}$ Formirati slučajnu veličinu koja predstavlja dobru procenu za prosečan broj zaposlenih u tehnološkoj firmi. Koje je njeno matematičko očekivanje?
   b) $\boxed{5}$ Pronaći najmanji broj n (broj firmi koje Marko mora da analizira) za koje Čebiševljeva nejednakost garantuje tačnost $e \pm 0.5$, sa intervalom poverenja od 95%. Pretpostaviti da je $var(X_i) = 10$.
   c) $\boxed{5}$ Ako je $\sigma(X_i) = 3$, odrediti verovatnoću da Markova procena odstupa od prave vrednosti najviše za 0.9, ako on analizira uzorak od 5000 firmi.

3. Markovljev proces je opisan narednom slikom. Početno stanje je S_0.



   a) $\boxed{4}$ Odrediti vrednosti a i b.
   b) $\boxed{4}$ Odrediti verovatnoću da proces ulazi u stanje S_3 prvi put u trećem koraku.
   c) $\boxed{5}$ Odrediti $p_{04}(3)$.
   d) $\boxed{4}$ Odrediti verovatnoću da proces nikada ne udje u stanje S_2.
   e) $\boxed{5}$ Odrediti verovatnoću da proces ulazi u stanje S_1 prvi put posle k koraka, ako je $k > 1$.

A grupa: rešenja

1. a)

Table 1: Raspodela

Y/X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$\frac{5}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
2	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
3	0	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
4	0	0	0	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{25}$

   b) $\frac{3}{25}$
   c) $p_{X|Y}(x|3) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
   $p_{Y|X}(y|4) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $M_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$
   $E(M_n) = e$.
   b) $var(M_n) = \frac{10}{n}$
   $P(|M_n - e| \geq 0.5) \leq \frac{var(M_n)}{0.5^2} = \frac{10}{n \cdot 0.5^2} \leq 0.05 \Longrightarrow n \geq \frac{10}{0.05 \cdot 0.5^2} = 800$
   c) $var(M_{5000}) = \frac{var(X_i)}{5000} = \frac{9}{5000}$
   $P(|M_{5000} - e| \geq 0.9) \leq \frac{9}{5000 \cdot 0.9^2} = 0.0022$

3. a) $a = 1/5$, $b = 1/3$
   b) $p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$
   c) $p_{04}(3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1$
   d) $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
   e) $p = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{5})^{k-2} \cdot \frac{1}{5}$