

Uslovna verovatnoća

1. U kutiji su 3 bele i 7 crnih kuglica. Izvlače se dve kuglice, jedna po jedna. Naći verovatnoću da je u prvom izvučena bela, a u drugom crna.
2. Neki čovek ima 5 ključeva, od kojih samo jedan otvara bravu. Proba nasumice jedan po jedan, sklanjajući ključeve koje je probao, sve dok ne otvori bravu. Naći verovatnoću da će uspeti iz k-tog pokušaja.
3. Student je došao na ispit znajući 84 od 102 pitanja. Na ispitu se izvlače 3 pitanja. Odrediti verovatnoću da zna sva 3 pitanja.
4. Dve kockice se bacaju istovremeno. Naći verovatnoću da zbir na njima bude 10.
5. Kolika je verovatnoća da u 2 bacanja jedne kocke, u prvom bacanju padne 1, 2 ili 3, a u drugom 3 ili 5.
6. U kutiji su 5 belih i 3 crne kuglice. Izvlače se 4 kuglice. Kolika je verovatnoća da budu izvučene 2 bele i 2 crne?
7. U kutiji su n belih i 1 crna kuglica. Slučajno se uzima m kuglica. Naći verovatnoću da među izvučenim kuglicama bude i crna.
8. Tri strelca gadjaju metu sa sledećim verovatnoćama da će pogoditi: $p_1 = 0,75$, $p_2 = 0,8$ i $p_3 = 0,9$. Naći verovatnoću da:
 - a) svi pogode metu
 - b) meta bude pogodjena samo jednom
9. U kutiji ima a belih i b crnih kuglica. Naći verovatnoću da u dva izvlačenja jedna kuglica bude bela, a druga crna.
10. Imamo dve kutije. U prvoj su 5 belih i 10 crnih kuglica, a u drugoj su 3 bele i 7 crnih kuglica. Iz druge kutije na slučajan način izvlačimo i prebacujemo jednu kuglicu u prvu kutiju. Zatim iz prve kutije uzimamo jednu kuglicu. Naći verovatnoću da je uzeta bela kuglica.
11. Na ispitu je 60 procenata studenata koji polažu ispit prvi put. Verovatnoća da onaj ko izlazi položi ispit je 0,3. dok je ostalima verovatnoća 0,4. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti.
12. U kutiji imamo a belih i b crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo jednu kuglicu, i sklanjamo je u stranu. Zatim izvlačimo drugu i ispostavlja se da je ona bela. Naći verovatnoću da smo sklonili belu kuglicu.
13. U grupi od 10 studenata, koji su polagali ispit: troje se spremilo odlično (mogu da odgovore na svih 30 pitanja), četvero se spremilo dobro (mogu da odgovore na 16 pitanja), dvoje se spremilo osrednje (mogu da odgovore na 10 pitanja) i jedan se spremio loše (ume da odgovori samo na 5 pitanja). Slučajno prozvani student odgovorio je tačno na sva 3 postavljena pitanja. Naći verovatnoću da je taj student iz:
 - a) grupe odličnih studenata
 - b) loše spremljeni student

Rešenja:

1. $p = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$
2. $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 A_i : brava otvorena u i -tom pokušaju.
 $p(A_1) = \frac{1}{5}$, $p(\overline{A_1}) = \frac{4}{5}$
 $p(A_2) = p(\overline{A_1}) \cdot p(A_2|\overline{A_1}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$
 $p(A_3) = p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \cdot p(A_3|\overline{A_1}A_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$
 $p(A_4) = \dots = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$
 $p(A_5) = p(\overline{A_4}) = \frac{1}{5}$
 $p(A_k) = \frac{1}{5}$
3. A_1 : izvlači prvo pitanje koje zna, $p(A_1) = 84/102$.
 A_2 : izvlači drugo pitanje koje zna (od preostalih), $p(A_2|A_1) = 83/101$
 ...
 A : zna sva tri pitanja
 $p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_2A_1) = \frac{84}{102} \cdot \frac{83}{101} \cdot \frac{82}{100}$
4. $p = \frac{\text{broj povoljnih}}{6 \cdot 6} = 3/36 = 1/12$
 Povoljni su ishodi 4+6, 5+5, 6+4
5. A_1 : u prvom padaju 1, 2 ili 3 (3 povoljna ishoda od 6)
 A_2 : u drugom padaju 3 ili 5 (2 povoljna ishoda od 6)
 $p(A) = p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$
6. $p = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}$

$$7. p = \frac{\binom{n}{m-1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{n+1}{m}}$$

$$8. a) p = p_1 p_2 p_3$$

$$b) p = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3$$

$$9. p = \frac{\binom{a}{1} \cdot \binom{b}{1}}{\binom{a+b}{2}}$$

10. H_1 : prebacili smo belu kuglicu iz druge kutije, $p(H_1) = 3/10$

H_2 : prebacili smo crnu kuglicu iz druge kutije, $p(H_2) = 1/10$

A: izvučena je bela kuglica

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{16} + \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{16}$$

11. H_1 : izabran je student koji polaže prvi put, $p(H_1) = 0.6$

H_2 : izabran je student koji ne polaže prvi put, $p(H_2) = 0.4$

A: student je položio ispit

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) = 0.6 * 0.3 + 0.4 * 0.4$$

12. H_1 : sklonili smo belu kuglicu, $p(H_1) = \frac{a}{a+b}$

H_2 : sklonili smo crnu kuglicu, $p(H_2) = \frac{b}{a+b}$

A: izvučena je bela kuglica u drugom izvlačenju.

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \dots = \frac{a}{a+b}$$

$$p(H_1|A) = \frac{p(H_1)p(A|H_1)}{p(A)} = \dots = \frac{a-1}{a+b-1}$$

13. H_1 : prozvan je odlično spremljen, $p(H_1) = 3/10$

H_2 : prozvan je dobro spremljen, $p(H_2) = 4/10$

H_3 : prozvan je srednje spremljen, $p(H_3) = 2/10$

H_4 : prozvan je loše spremljen, $p(H_4) = 1/10$

A: student je odgovorio na sva 3 pitanja

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) + p(H_3)p(A|H_3) + p(H_4)p(A|H_4) = \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{4}{10} \cdot \frac{\binom{16}{3}}{\binom{30}{3}} + \frac{2}{10} \cdot \frac{\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{\binom{30}{3}} = 0,361..$$

$$p(H_1|A) = \frac{p(H_1)p(A|H_1)}{p(A)} = \dots = 0,83$$

$$p(H_4|A) = \frac{p(H_4)p(A|H_4)}{p(A)} = \dots = 0,0006$$

Zadaci preuzeti iz literature profesora dr Nenada Cakića