

1. a) $\boxed{4}$ Dokazati $P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$
 b) $\boxed{4}$ Ako je $P(B) > 0$, dokazati $P(A|B) \leq \frac{P(A)}{P(B)}$.
2. Dva novčića se bacaju u isto vreme, nezavisno i samo jednom. Ako je ishod na oba novčića isti, onda pobeđujemo, a gubimo u suprotnom. Neka je A događaj da na prvom novčiću padne glava, neka je B događaj da na drugom novčiću padne glava, i neka je C događaj da smo pobedili.
 a) $\boxed{6}$ Odrediti skup svih elementarnih ishoda. Odrediti skupove ishoda koji čine događaje A , B i C .
 b) $\boxed{6}$ Da li su događaji A i C nezavisni? Dokazati.
3. Data je diskretna slučajna veličina X sa funkcijom raspodele $p_X(x) = \frac{|x^3|}{a}$, $x \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$.
 a) $\boxed{3}$ Naći a .
 b) $\boxed{6}$ Naći raspodelu slučajne veličine $Y = \begin{cases} X, & X \geq 0 \\ X + 4, & X < 0 \end{cases}$.
 c) $\boxed{4}$ Naći matematičko očekivanje slučajne veličine Y .
4. Neka su X_i , $1 \leq i \leq 4$ nezavisne Bernulijeve slučajne veličine sa raspodelom $X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. Ako je $X = \sum_{i=1}^4 X_i$, a $p = 0.1$ odrediti:
 a) $\boxed{4}$ $P(X = 2)$
 b) $\boxed{6}$ $P(X_1 = 1|X = 2)$
 c) $\boxed{7}$ $E(X_1|X = 2)$.

Rešenja

A grupa

1. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (1)
 $P(A \cap B) \leq 1 \implies P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ (2)
 Iz (1) i (2) $\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 1$
 b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. (1)
 Kako je $(A \cap B) \subset A$, tada je $P(A \cap B) < P(A)$ (2)
 Iz (1), (2) $\implies P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)}$
2. a) $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, $A = \{GG, GP\}$, $B = \{GG, PG\}$, $C = \{PP, GG\}$.
 b) $P(A) = 1/2$.
 $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$
 $P(A|C) = P(A) \implies$ događaji A i C su nezavisni.
3. a) $X : \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{64}{a} & \frac{27}{a} & \frac{8}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{8}{a} & \frac{27}{a} & \frac{64}{a} \end{pmatrix}$.
 $\frac{64 + 27 + 8 + 1 + 1 + 8 + 27 + 64}{a} = 1 \implies a = 200$
 b) $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{64}{200} & \frac{28}{200} & \frac{16}{200} & \frac{28}{200} & \frac{64}{200} \end{pmatrix}$.
 c) $E(Y) = 2$.
4. $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
 a) $P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^2$
 b) $P(X_1 = 1|X = 2) = \frac{P(X_1 = 1 \cap X = 2)}{P(X = 2)}$
 $X_1 = 1 \cap X = 2$ je događaj $X = "1" + X_2 + X_3 + X_4$, s tim što samo jedan od X_2, X_3, X_4 može da bude =1. Zbog toga
 $P(X_1 = 1 \cap X = 2) = 0.1 \cdot \binom{3}{1} \cdot 0.1 \cdot 0.9^2$
 $\implies P(X_1 = 1|X = 2) = 1/2$
 c) $E(X_1|X = 2) = 1 \cdot P(X_1 = 1|X = 2) + 0 \cdot P(X_1 = 0|X = 2) = P(X_1 = 1|X = 2) = 1/2$.