**Prvi kolokvijum iz Matematike 2** na TMF-u u Beogradu 15.06.2017. **A grupa**

1. $\boxed{6}$ Izračunati $\int x \cdot arctg\dfrac{2x}{x^2-1}dx$.

2. $\boxed{6}$ Izračunati površinu dela kruga $x^2+y^2=4$ koji se nalazi izmedju prave $x=1$ i tangente na krivu $y=x^2-5x+11$ u tački $T(3,5)$.

3. $\boxed{6}$ Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom lika ograničenog gornjim lukom elipse $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ i pravama $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=-y$. Rotacija se vrši oko x-ose.

4. $\boxed{6}$ Odrediti jednačinu tangentne ravni i normale na površ $z(x,y)=y\cdot arctg(x)+\ln(x+y)+x\dfrac{\sin x-1}{y^2+4x}+2$ u tački $M(0,y_0,2)$.

5. a) $\boxed{2}$ Odrediti drugi parcijalni izvod $z''_{xy}$ funkcije $z(x,y)=\cos e^{x+2y}$.

   b) $\boxed{2}$ Izračunati $\int \dfrac{4x^2+x+4}{x^3+2x}dx$.

   c) $\boxed{2}$ Primenom odredjenog integrala odrediti dužinu kraćeg dela kružnice $x^2+y^2=8$, koji se nalazi izmedju tačaka $M(2,2)$ i $N(-\sqrt{8},0)$.

**Prvi kolokvijum iz Matematike 2** na TMF-u u Beogradu 15.06.2017. **B grupa**

1. $\boxed{6}$ Izračunati $\int x \cdot arctg\dfrac{4x}{x^2-4}dx$.

2. $\boxed{6}$ Izračunati površinu dela kruga $x^2+y^2=4$ koji se nalazi izmedju prave $x=1$ i tangente na krivu $y=x^2-7x+7$ u tački $A(3,-5)$.

3. $\boxed{6}$ Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom lika ograničenog gornjim lukom elipse $x=2\cos t$, $y=3\sin t$ i pravama $y=-x$, $y=\sqrt{3}x$. Rotacija se vrši oko x-ose.

4. $\boxed{6}$ Odrediti jednačinu tangentne ravni i normale na površ $z(x,y)=x\cdot arctg(y)+\ln(x+y)+y\dfrac{\sin y-1}{x^2+4y}+3$ u tački $M(x_0,0,3)$.

5. a) $\boxed{2}$ Izračunati $\int \dfrac{3x^2+x+1}{x^3+x}dx$.

   b) $\boxed{2}$ Primenom odredjenog integrala odrediti dužinu kraćeg dela kružnice $x^2+y^2=8$, koji se nalazi izmedju tačaka $A(\sqrt{8},0)$ i $B(-2,2)$.

   c) $\boxed{2}$ Odrediti drugi parcijalni izvod $z''_{yx}$ funkcije $z(x,y)=\cos e^{2x+y}$.

**Drugi kolokvijum iz Matematike 2** na TMF-u u Beogradu 15.06.2017. **A grupa**

1. $\boxed{6}$ Izračunati $\int_\gamma \sqrt{1-\frac{1}{6}x^2}ds$, gde je $\gamma$ odredjena jednačinama $z-5=-2x^2-y^2, z=\sqrt{2x^2+y^2}$ (slika).

2. $\boxed{6}$ Odrediti zapreminu tela ograničenog sa površi $z+1=x^2+y^2$, gornjim delom sfere $x^2+y^2+(z-3)^2=4$ i ravni $z=0$ (slika).

3. $\boxed{6}$ Izračunati masu tela odredjenog relacijama $x^2+y^2+z^2\le 9$, $x^2+y^2-z^2\le 1$ i $z\ge 0$, ako je gustina $\rho(x,y,z)=z$ (slika).

4. $\boxed{6}$ Izračunati masu dela površi $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$ koji se nalazi izmedju površi $x^2+y^2+z^2=5$ i $z=3$, ako je gustina $\rho(x,y,z)=1+z$ (slika).

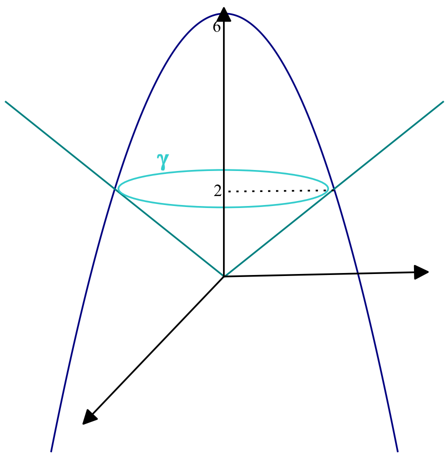
5. a) $\boxed{2}$ Izračunati $\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2-2xy+y^2}dxdy$, gde je $D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 3, 1\le x-y\le 2\}$ (slika).
   b) $\boxed{2}$ Izračunati integral $\int_l (x+1)dx+ydy+y^2dz$, gde je $l$ odsečak prave od tačke $A(0,0,1)$ do $B(0,2,2)$.
   c) $\boxed{2}$ Odrediti granice integracije $\iint_D f(x,y)dxdy$ u oba slučaja, ako je $D=\{(x,y)|x\le 2, x\ge y\ge 0\}$ (slika).

**Resenja drugog kolokvijuma iz Matematike 2** na TMF-u u Beogradu 15.06.2017. **A grupa**

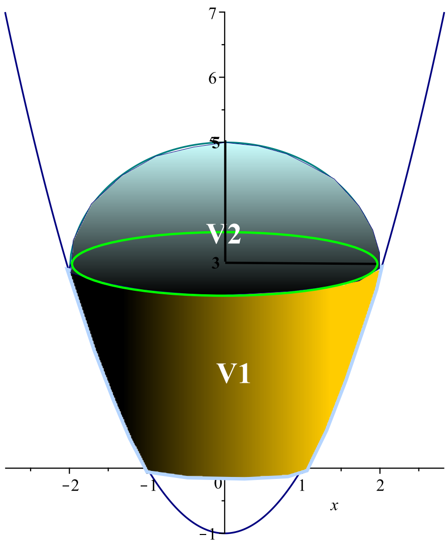
1. Kriva $\gamma$ se nalazi na visini $z=2$.

$$\gamma:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t\\ y=2\sin t\\ t\epsilon[0,2\pi]\end{cases}$$

$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 t}dt=2\pi\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}$



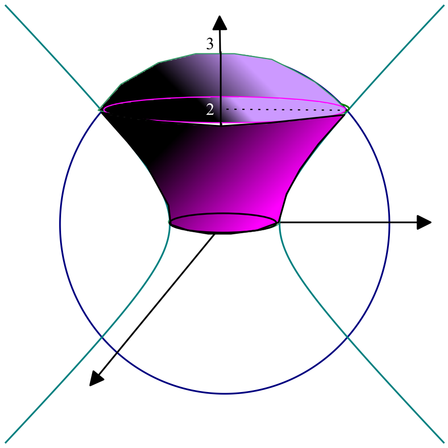

2. Može preko dvojnog ili trojnog integrala. Jednostavnije je preko trojnog. Presek sfere i paraboloida se nalazi na visini $z=3$.




Pogodna je smena polarno-cilindričnim koordinatama:

$$smena:\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

Telo $G_1 : \varphi\epsilon[0, 2\pi], z\epsilon[0, 3], \rho\epsilon[0, \sqrt{z+1}]$
Telo $G_2 : \varphi\epsilon[0, 2\pi], z\epsilon[3, 5], \rho\epsilon[0, \sqrt{4-(z-3)^2}]$
$V(G) = V_1 + V_2 = V(G_1) + V(G_2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{z+1}} \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 dz \int_0^{\sqrt{4-(z-3)^2}} \rho d\rho = \dfrac{15\pi}{2} + \dfrac{16\pi}{3}$




3. Trojni integral. Presek sfere i hiperboloida se nalazi na visini $z = 2$.
Pogodna je smena polarno-cilindričnim koordinatama:

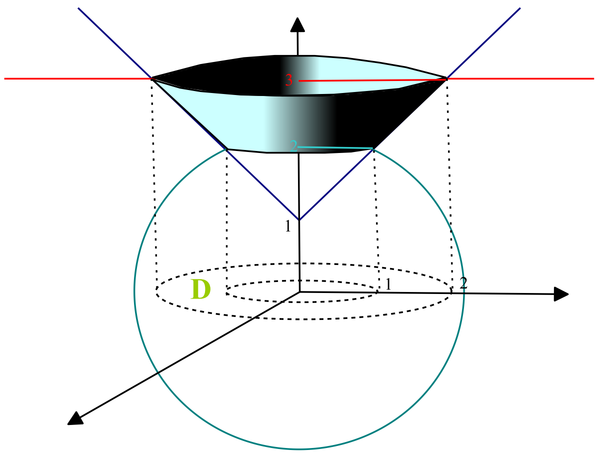
$$smena : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Telo $G_1 : \varphi\epsilon[0, 2\pi], z\epsilon[0, 2], \rho\epsilon[0, \sqrt{1+z^2}]$
Telo $G_2 : \varphi\epsilon[0, 2\pi], z\epsilon[2, 3], \rho\epsilon[0, \sqrt{9-z^2}]$
$m(G) = m(G_1) + m(G_2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} z\rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} z\rho d\rho = 6\pi + \dfrac{25\pi}{4}$

4. Površinski integral. Presek sfere i konusa se nalazi na visini $z = 2$.

$$D : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \varphi\epsilon[0, 2\pi] \\ \rho\epsilon[1, 2] \end{cases}$$

$\rho(x, y, z) = 1 + z = 1 + 1 + \sqrt{x^2+y^2} = 2 + \rho$




$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 (2+\rho)\sqrt{2}\rho d\rho = \dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$

5. a)

$$smena : \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \\ J = -1/2 \end{cases}$$

I=9/4.
b) l: $x = 0, y = 2t, z = t + 1, t\epsilon[0, 1]$. I=10/3
c) $I = \int_0^2 dx \int_0^x f(x, y)dy = \int_0^2 dy \int_y^2 f(x, y)dx$.

**Drugi kolokvijum iz Matematike 2** na TMF-u u Beogradu 15.06.2017. **B grupa**

1. $\boxed{6}$ Izračunati $\int_\gamma \sqrt{1-\frac{1}{6}y^2}ds$, gde je $\gamma$ odredjena jednačinama $z-5=-x^2-2y^2, z=\sqrt{x^2+2y^2}$ (slika).

2. $\boxed{6}$ Odrediti zapreminu tela ograničenog sa površi $x^2+y^2=z+2$, gornjim delom sfere $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ i $z=0$ (slika).

3. $\boxed{6}$ Izračunati masu tela odredjenog relacijama $x^2+y^2-z^2\leq 1$, $x^2+y^2+z^2\leq 19$ i $z\geq 0$, ako je gustina $\rho(x,y,z)=z$ (slika).

4. $\boxed{6}$ Izračunati masu dela površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ koji se nalazi izmedju površi $x^2+y^2+(z+1)^2=5$ i $z=2$, ako je gustina $\rho(x,y,z)=z+2$ (slika).

5. a) $\boxed{2}$ Izračunati $\iint \frac{(x-y)^2}{x^2+2xy+y^2}dxdy$, gde je $D=\{(x,y)\mid 1\leq x+y\leq 3, 0\leq x-y\leq 1\}$ (slika).
   b) $\boxed{2}$ Izračunati integral $\int_l xdx+(y-1)dy+z^2dz$, gde je $l$ odsečak prave od tačke $A(1,0,0)$ do $B(2,0,2)$.
   c) $\boxed{2}$ Odrediti granice integracije $\iint_D f(x,y)dxdy$ u oba slučaja, ako je $D=\{(x,y)|x\leq 4, y\geq x\}$ (slika).