

Vektori

1. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 12, 2)$, $\vec{c} = (-1, 2, -4)$, $\vec{d} = (0, 2, 1)$

a) napisati date vektore kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$;

$$(\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{d} = 2\vec{j} + \vec{k})$$

b) odrediti $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{d}$, $2\vec{c}$, $-\vec{d}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$; $(2, 14, 5)$, $(-1, 0, -5)$, $(-2, 4, -8)$, $(0, -2, -1)$, $(-1, -32, 0)$

c) odrediti α , γ i δ tako da važi $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$. $\alpha = 3, \gamma = 2, \delta = 1$

2. Dati su vektori $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, -2, -3)$, $\vec{c} = (1, 3, -1)$, $\vec{d} = (-2, -4, 3)$. Odrediti:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (23) b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$; (-17) c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$; (-12) d) $(2\vec{b} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} - 3\vec{d})$; (43).

3. Odrediti $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ako su $\vec{a} = (8, 2, 2)$, $\vec{b} = (4, -4, 0)$. ($\frac{\pi}{3}$)

4. Odrediti $\vec{a} \times \vec{b}$ ako su:

a) $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$; $(-1, 5, -10)$

b) $\vec{a} = (-2, 3, -3)$, $\vec{b} = (0, -4, 3)$; $(-3, 6, 8)$

c) $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, -2, -8)$. $(26, 37, 7)$

5. Odrediti $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ako su $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. ($\frac{\pi}{4}$)

6. Tačke $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$ i $C(3, -2, 1)$ su temena trougla. Izračunati površinu tog trougla. ($5\sqrt{2}$)

7. Temena trougla su tačke $A(3, -2, 0)$, $B(-3, -2, 1)$ i $C(2, -1, 9)$. Izračunati obim tog trougla. $|\vec{AB}| = \sqrt{37}$, $|\vec{BC}| = \sqrt{90}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{83}$

8. Data su tri uzastopna temena paralelograma $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$, $C(5, 0, 2)$. Odrediti koordinate četvrtog temena paralelograma kao i njegovu površinu. $(D(-1, 1, 1), P = \sqrt{52})$

9. Tačke $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(6, 4, 4)$ su tri uzastopna temena paralelograma. Odrediti koordinate četvrtog temena i obim tog paralelograma. $(D(4, 0, 6), O = 2(\sqrt{24} + \sqrt{22}))$

10. Odrediti $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ako su:

a) $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, -3, 4)$, $\vec{c} = (-8, 12, 6)$; (-66)

b) $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{c} = (3, 4, 1)$; (15)

c) $\vec{a} = (-4, 1, -3)$, $\vec{b} = (-4, 1, -3)$, $\vec{c} = (3, 4, 1)$. (0)

11. Dati su vektori $\vec{a} = (2, -4, 4)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$, $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Odrediti vektor $\vec{v}$ tako da važi $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{b} = 2$ i $\vec{v} \cdot \vec{c} = 3$. $(-\frac{13}{10}, \frac{7}{20}, \frac{5}{4})$

12. Odrediti zapreminu piramide čije su temena $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 8)$ i $D(3, 7, 2)$. ($\frac{95}{6}$)

13. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$ i $\vec{b} = (0, 4, 0)$. Odrediti koeficijent α tako da su vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ ortogonalni. ($\alpha = 4$)

14. Neka za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Naći veći ugao između stranica paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{q} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. ($\arccos \frac{-188}{91\sqrt{409}}$)

15. Odrediti dužinu stranica i površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = 4\vec{m} - 2\vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. ($a = 4\sqrt{3}$, $b = 8$, $P = 32\sqrt{3}$)

16. Tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ i $D(2, 3, 8)$ su temena piramide. Izračunati zapreminu piramide i njenu visinu iz temena D . ($V = 14$, $H = \sqrt{14}$)

17. Pokazati da su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$ komplanarni pa predstaviti vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. ($\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$)

18. Dati su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = -\vec{j} + 2\vec{k}$. Odrediti vektor $\vec{d}$ tako da važi $\vec{c} \cdot \vec{d} = 1$ i $\vec{d} \times \vec{a} = \vec{b}$. $(-3, -3, -1)$

19. Odrediti ugao između dijagonala paralelograma čije su stranice određene vektorima $\vec{a} = 3\vec{q} - 2\vec{p}$ i $\vec{b} = \vec{q} + 3\vec{p}$ ako važi $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. ($\arccos \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{43}}$)

20. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 0)$, $\vec{c} = (3, \alpha, 4)$. Odrediti koeficijent α tako da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni i predstaviti vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. ($\alpha = -3$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$)

21. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$ i $\vec{b} = (1, -2, 0)$. Odrediti vektor $\vec{c}$ koji je komplanaran sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, normalan na vektor $\vec{a}$ i neka je $\vec{c} \cdot \vec{b} = 14$. $(4, -5, 1)$

22. Odrediti $\angle(\vec{m}, \vec{n})$ ako su vektori $\vec{s} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{t} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ normalni i ako važi $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$. ($\frac{\pi}{3}$)

23. Odrediti vektor $\vec{x}$ koji je normalan na vektore $\vec{a} = (3, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$ i $\vec{c} = (1, 1, -1)$. ($\vec{0}$)

24. Odrediti vektor $\vec{c}$ koji je kolinearan vektoru $\vec{a} + \vec{b}$ ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 18$ i $|\vec{b}| = 2$. Napisati vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. ($\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$)

25. Vektor $\vec{n}$ je komplanaran sa vektorima $\vec{p}$ i $\vec{q}$ pri čemu je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 4$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Ako je $\vec{n} \cdot \vec{p} = 8$ i $\vec{n} \cdot \vec{p} = 16$, odrediti:

a) $|\vec{n} + \vec{q}|$; ($= 4\sqrt{7 - 2\sqrt{2}}$)

b) $\angle(\vec{n}, \vec{p})$. ($= \arccos \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{2}}}$)