

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА НЕЗАВИСНОСТ ДОГАЂАЈА.

- Нека су A и B случајни догађаји и нека је $P(B) > 0$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

↳ вероватноћа догађаја A уз услов да се остварио догађај B

Уз дефиницију условне вероватноће следи

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

↳ формула множења вероватноћа

- Ако су $A_1, A_2, \dots, A_n$ случајни догађаји формула множења гласи

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

- Случајни догађаји A и B су НЕЗАВИСНИ ако важи

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Ако су A и B независни случајни догађаји, тада важи

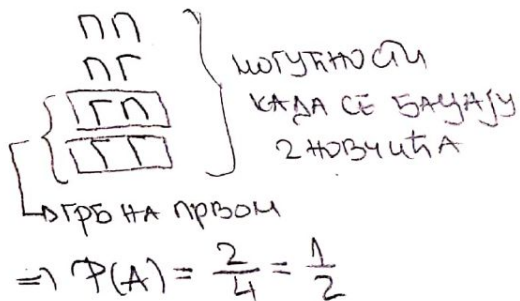
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

1) Експеримент се састоји у бацању 2 новчића. Уочимо следеће догађаје: А - пао је грб на првом новчићу; В - пао је бар један грб; С - пао је грб на другом новчићу. Да ли су следећи догађаји независни?

а) А и С
 б) В и С

а) Догађај А

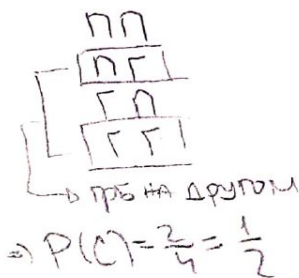


$$P(AC) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(AC) = P(A)P(C) \Rightarrow A \text{ и } C \text{ су независни}$$

Догађај С

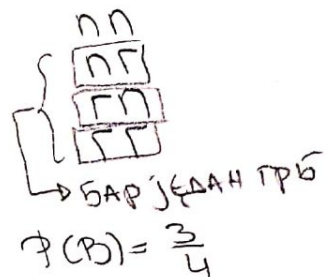


Догађај АС

АС - пао је грб на првом и на другом новчићу



б) Догађај В



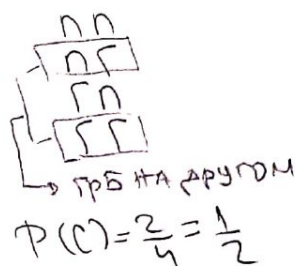
$$P(BC) = \frac{1}{2}$$

$$P(B)P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow P(BC) \neq P(B)P(C)$$

$\Rightarrow$ Догађаји В и С нису независни тј зависни су

Догађај С



Догађај ВС

ВС - пао је бар један грб и грб на другом



② На основу вишегодишњег искуства зна се да је у датој области у септембру 10 произвољних дана кишовито. Фармери морају да обаве ратарске послове у року 3 прва дана септембра. Израчунају вероватноћу да ниједан од ових дана неће бити кишовит.

A - ниједан од прва три дана септембра није кишовит

- Уведимо помоћне догађаје A_1, A_2, A_3

A_1 - први дан септембра је сунчан

A_2 - други дан септембра је сунчан

A_3 - трећи дан септембра је сунчан

Догађај A је пресек (производ) ова три догађаја, јер је он испуњен ако су испуњена сва три помоћна догађаја

$$A = A_1 A_2 A_3$$

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2)$$

формула умножења вероватноћа

$$P(A_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(A_2 | A_1) = \frac{19}{29} \quad ; \quad P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{9}{14} = \frac{19 \cdot 3}{29 \cdot 7} = \frac{57}{203}$$

5] У кутији се налази 8 нових тениских лоптица. За један меч се случајно узимају 2 лоптице које се после сваког меча враћају у кутију. Колика је вероватноћа да ће после 4 одиграна меча све лоптице бити употребљене?

A - после 4 одиграна меча све лоптице су употребљене

- Уведемо помоћне догађаје: A_1, A_2, A_3, A_4

A_1 - први меч је играч новим лоптама

A_2 - други меч је играч новим лоптама

A_3 - трећи меч је играч новим лоптама

A_4 - четврти меч је играч новим лоптама

Догађај A је испуњен ако су испуњени сва 4 помоћна догађаја
тј. догађај A представља пресек догађаја A_1, A_2, A_3 и A_4

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4$$

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = \underbrace{P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) P(A_4 | A_1 A_2 A_3)}_{\text{формула множења вероватноћа}}$$

$$P(A_1) = 1; \quad P(A_2 | A_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}}; \quad P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}; \quad P(A_4 | A_1 A_2 A_3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}$$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}$$

4) Три студента S_1, S_2 и S_3 полажу испит из математике. Вероватноћа полагача испита сваког од њих је редом 0,9, 0,7 и 0,6. Одредити вероватноћу:

- да ће бар један студент положити испит;
- да ће само један студент положити испит;
- ако се зна да је испит положио само један студент, одредити вероватноћу да је испит положио студент S_3 .

Уведимо помоћне догађаје

A - испит је положио студент $S_1 \Rightarrow P(A) = 0,9$
 B - испит је положио студент $S_2 \Rightarrow P(B) = 0,7$
 C - испит је положио студент $S_3 \Rightarrow P(C) = 0,6$

дати подаци

Догађаји A, B и C су независни.

а) D - испит је положио бар 1 студент

Догађај D можемо представити уз помоћ помоћних догађаја на следећи начин:

$$D = \underbrace{A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C}_{\text{испит је положио један студент, а друга два нису}} + \underbrace{AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC}_{\text{испит су положила два студента, а трећи није}} + \underbrace{ABC}_{\text{испит су положила сва 3 студента}}$$

$$P(D) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) + P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) + P(ABC) =$$

$$= P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C) = \dots = 0,988$$

где је $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$
 $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,6 = 0,4$

или краће за рачун

$$\Omega = \{A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}B\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}BC, AB\bar{C}, A\bar{B}C, \bar{A}BC, ABC\} - \text{скуп свих могућих исхода}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$D = \Omega - \bar{A}\bar{B}\bar{C} \Rightarrow P(D) = P(\Omega) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) =$$

$$= 1 - 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 1 - 0,012 = 0,988$$

δ) E - испит је положио само један студент

$$E = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$P(E) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(A\bar{B}C) =$$

$$= P(A)P(B)P(C) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) =$$

$$= 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,108 + 0,028 + 0,018 = 0,154$$

б) За рачунање вероватноће тражемо догађај корисно услову вероватноћу

$$P(C|E) = ?$$

↳ вероватноћа да је испит положио студент S_3 , ако се зна да је испит положио само један студент

$$P(C|E) = \frac{P(CE)}{P(E)} \rightarrow \text{израчунавши као под δ)}$$

CE - догађај да је испит положио један студент и да је то S_3

⇒ овај догађај можемо записати и на следећи начин

$CE = \bar{A}\bar{B}C$ - испит је положио студент S_3 , а студенти S_1 и S_2 нису

$$P(C|E) = \frac{P(CE)}{P(E)} = \frac{P(\bar{A}\bar{B}C)}{P(E)} = \frac{P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)}{P(E)} = \frac{0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,6}{0,154} = \frac{0,018}{0,154} \approx 0,12$$

5] У кутију се налази 8 белих и 10 црних куглица. Из кутије се једна за другом узимају 2 куглице. Наћи вероватноћу да је бар једна од извучених куглица бела ако се:

а) прва куглица врати у кутију;

б) прва куглица не врати у кутију.

- Нека је А догађај чија се вероватноћа тражи

А - бар једна од извучених куглица је бела

а) Уведемо помоћне догађаје

A_1 - прва извучена куглица је бела

A_2 - друга извучена куглица је бела

Догађај А можемо представити као унију догађаја A_1 и A_2

(или је прва извучена куглица бела или је друга извучена бела $\Rightarrow$ бар једна је бела)

Како се прва куглица врати у кутију $\Rightarrow$ догађаји A_1 и A_2 су независни $\Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2)$

$A = A_1 \cup A_2 \Rightarrow A = A_1 + A_2$ (јер су A_1 и A_2 независни $\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$)

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \rightarrow \text{вероватноћа уније догађаја}$$

$$P(A_1) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \quad \begin{array}{l} \nearrow 8 \text{ је белих} \\ \searrow \text{укупан број куглица} \end{array} \Rightarrow \text{прва куглица се врати у кутију и опет их је 18 (8 белих, 10 црних)}$$

$$P(A_2) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \quad \text{јер су } A_1 \text{ и } A_2 \text{ независни}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) P(A_2) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9} - \frac{16}{81} = \frac{72-16}{81} = \frac{56}{81}$$

5) Како се прва куглица не враћа у кутију догађаји A_1 и A_2 нису независни

Скуп свих могућих исхода Ω је: БЕЛА БЕЛА
БЕЛА ЦРНА
ЦРНА БЕЛА
ЦРНА ЦРНА } ово су догађаји који нам одговарају

догађај да је бар једна бела
можемо добити када из
скупа свих могућих исхода
искључимо догађај да су
обе црне

$\Rightarrow$ уведемо помоћне догађаје

B_1 - прва извучена је црна

B_2 - друга извучена је црна

$$\Rightarrow A = \Omega \setminus B_1 B_2 \Rightarrow P(A) = P(\Omega) - P(B_1 B_2)$$

$\hookrightarrow$ из скупа свих могућих исхода искључимо догађај да су обе црне

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(B_1 B_2) = ?$$

$\hookrightarrow$ прва извучена је црна и друга извучена је црна

за рачунање $P(B_1 B_2)$ користити условну вероватноћу

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} \Rightarrow P(B_1 B_2) = P(B_2 | B_1) \cdot P(B_1)$$

$\hookrightarrow$ вероватноћа да је друга извучена црна, ако знамо да је прва извучена црна
 $\hookrightarrow$ 10 је црних

$$P(B_1) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$\hookrightarrow$ укупно куглица

$\Rightarrow$ прва извучена је црна и не враћа се у кутију $\Rightarrow$ у кутији је 17 куглица
9 црних

$$\Rightarrow P(B_2 | B_1) = \frac{9}{17}$$

$$P(B_1 B_2) = \frac{9}{17} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{17}$$

$$P(A) = 1 - P(B_1 B_2) = 1 - \frac{5}{17} = \boxed{\frac{12}{17}}$$

6) Стрелци A, B и C тађају у циљ независно један од другог, погађајући га са вероватноћама 0,5; 0,4 и 0,3 редом. Установљено је да је циљ погођен 2 пута. Шта је вероватније: да је стрелац C погодио или промашио?

Уведемо помоћне догађаје

A - стрелац A је погодио циљ $\Rightarrow P(A) = 0,5$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5$

B - стрелац B је погодио циљ $\Rightarrow P(B) = 0,4$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$

C - стрелац C је погодио циљ $\Rightarrow P(C) = 0,3$, $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,3 = 0,7$

D - циљ је погођен 2 пута

D можемо представити уз помоћ догађаја A, B, C $\Rightarrow$ циљ су погодили било која два стрелца, трећи је промашио $\Rightarrow$

$D = AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$ A, B, C су независни догађаји

$$\begin{aligned} P(D) &= P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) = \\ &= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) = \\ &= 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,14 + 0,09 + 0,06 = \boxed{0,29} \end{aligned}$$

Уведемо и следеће догађаје

CID - стрелац C је погодио уз услов да је циљ погођен 2 пута

$\bar{C}ID$ - стрелац C је промашио уз услов да је циљ погођен 2 пута

$P(CID) = ?$, $P(\bar{C}ID) = ?$

$$P(CID) + P(\bar{C}ID) = 1 \Rightarrow P(CID) = 1 - P(\bar{C}ID)$$

$$P(\bar{C}ID) = \frac{P(\bar{C}D)}{P(D)} = \frac{P(AB\bar{C})}{P(D)} = \frac{P(A)P(B)P(\bar{C})}{P(D)} = \frac{0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,7}{0,29} = \frac{0,14}{0,29} = \boxed{0,481}$$

$\bar{C}D$ - догађај да је стрелац C промашио и да је циљ погођен 2 пута

$\Rightarrow$ A и B су погодили, C је промашио $\Rightarrow \bar{C}D = AB\bar{C}$

$$P(CID) = 1 - P(\bar{C}ID) = 1 - 0,481 = 0,519$$

$\Rightarrow P(CID) > P(\bar{C}ID) \Rightarrow$ вероватније је да је стрелац C погодио циљ, ако је циљ погођен 2 пута

7) Од 100 студената Хемијског инжењерства 60 је положило Диференцијалне једначине, 80 Елементе вероватноће и статистике, а 50 оба предмета. Израчунати вероватноће следећих догађаја

а) случајно одабрани студент је положио бар један од ових предмета;

б) случајно одабрани студент није положио Диференцијалне једначине, ако знамо да јесте Елементе вероватноће и статистике;

в) случајно одабрани студент је положио тачно један од наведених предмета.

Уведемо помоћне догађаје

A - случајно одабрани студент је положио Диференцијалне једначине

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

B - случајно одабрани студент је положио Елементе вероватноће и статистике

$$P(B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

AB - случајно одабрани студент је положио оба предмета

$$P(AB) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

а) случајно одабрани студент је положио бар један испит $\Rightarrow$

или Диференцијалне једначине или Елементе вероватноће и статистике

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{7}{5} - \frac{1}{2} = \frac{14-5}{10} = \frac{9}{10}$$

б) случајно одабрани студент није положио Диференцијалне једначине, ако знамо да јесте Елементе вероватноће и статистике

$$P(\bar{A}|B) = ? \quad P(\bar{A}|B) + P(A|B) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{8} \Rightarrow P(\bar{A}|B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

в) случајно одабрани студент је положио тачно један од предмета

$$P(\bar{A}|B) + P(\bar{B}|A) = ? \quad \text{из б) } \Rightarrow P(\bar{A}|B) = \frac{3}{8}$$

$\hookrightarrow$ није положио Елементе вер и ст, ако јесте диф једн.

$\hookrightarrow$ није положио диф једн, ако јесте Елементе вер. и ст.

$$P(\bar{B}|A) + P(B|A) = 1 \Rightarrow P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(BA)}{P(A)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(\bar{A}|B) + P(\bar{B}|A) = \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{9}{24} + \frac{4}{24} = \frac{13}{24}$$