Теорема тоталне вероватноће. Бајесова формула.

Ако су $H_1, H_2, \dots, H_n$, $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$ случајни догађаји за које важи

$$H_i H_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

(свака два су међусобно дисјунктна и сви заједно чине цео скуп елементарних исхода), кажемо да чине потпун систем догађаја.

Нека је A случајни догађај који се може реализовати са једним од тих n догађаја H_i, $i = 1, \dots, n$ (који се називају хипотезе под којима се реализује догађај A). Тада важи

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

која се назива формула тоталне вероватноће.

Бајесова теорема: Под претходним претпоставкама важи

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

(Бајесова формула)

Задаци:

Formula totalne verovatnoće. Bajesova formula

1. Na avion se izbacuju 3 pojedinačna hica. Verovatnoća da avion bude pogođen prvim hicem je 0,5, drugim 0,6, trećim 0,8. Da bi avion bio izbačen iz stroja potrebna su sva tri pogotka. U slučaju jednog pogotka avion će biti izbačen iz stroja sa verovatnoćom 0,3, u slučaju dva pogotka sa verovatnoćom 0,7. Naći verovatnoću da će kao ishod tog gađanja avion biti izbačen iz stroja.

2. U fabrici obuće se koriste mašine za proizvodnju cipela M_1, M_2 i M_3. Mašina M_1 proizvodi dvostruko više cipela od mašine M_2, a mašina M_2 proizvodi trosrtuko više cipela od mašine M_3. Mašina M_1 postiže proizvodnju 40%, mašina M_2 60%, a mašina M_3 80% cipela vrhunskog kvaliteta. Kolika je verovatnoća da je slučajno odabrana cipela iz ove fabrike vrhunskog kvaliteta? Ako je slučajno odabrana cipela iz ove fabrike vrhunskog kvaliteta, kolika je verovatnoća da je ona proizvedena na mašini M_2 ?

3. U jednoj kutiji se nalaze 4 bele i 5 plavih kuglica, a u drugoj 3 bele i 4 plave kuglice. Na slučajan način se iz prve u drugu kutiju prebacuju 3 kuglice. Zatim se iz druge kutije izvlači jedna kuglica.

a) odrediti verovatnoću da je izvučena kuglica bela;

b) ako je izvučena kiglica bela, odrediti verovatnoću da su iz prve u drugu kutiju prebačene jedna plava i dve bele kuglice.

4. Pretpostavimo da je verovatnoća da ponesem novčanik sa sobom 0,7. Ako je novčanik kod mene, verovatnoća da je u jednom od 5 džepova je podjednaka. U autobusu mu prilazi džeparoš, pretresa 3 džepa i nenašavši novčanik odustaje.

a) kolika je verovatnoća da novčanik nije u nekom od 3 pretresena džepa?

b) kolika je sada verovatnoća da je novčanik kod mene?

1. Дефинишимо следеће хипотезе:

H_0 - авион није погођен ниједним хицем

H_1 - авион је погођен једним хицем

H_2 - авион је погођен са два хица

H_3 - авион је погођен са три хица

Ови догађаји су међусобно дисјунктни (не могу два да се реализују истовремено, међусобно се искључују), али да бисмо рекли да чине потпун систем догађаја морамо показати да је збир њихових вероватноћа 1.

Нека су догађаји:

B_1 - авион је погођен првим хицем

B_2 - авион је погођен другим хицем

B_3 - авион је погођен трећим хицем

$P(B_1) = 0,5$ $P(B_2) = 0,6$ $P(B_3) = 0,8$

$$H_0 = \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3} \Rightarrow P(H_0) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})P(\overline{B_3})$$

B_1, B_2 и B_3 су независни догађаји!

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 =$$

$$= \underline{0{,}04}$$

$$H_1 = B_1\overline{B_2}\,\overline{B_3} + \overline{B_1}B_2\overline{B_3} + \overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3$$

$$P(H_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = \underline{0{,}26}$$

$$H_2 = B_1B_2\overline{B_3} + B_1\overline{B_2}B_3 + \overline{B_1}B_2B_3$$

$$P(H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = \underline{0{,}46}$$

$$H_3 = B_1B_2B_3 \Rightarrow P(H_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = \underline{0{,}24}$$

$$P(H_0) + P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}46 + 0{,}24$$

$$= 1$$

$\Rightarrow H_0, H_1, H_2, H_3$ чине потпун систем догађаја.

Вероватноћа да авион буде избачен из строја

ако је погођен једним хицем је 0,3

ако је погођен са два хица 0,7

а ако је погођен са три хица 1 (100 %)

Догађај A – авион је избачен из строја

$\Rightarrow \quad P(A|H_1) = 0,3$

$P(A|H_2) = 0,7$

$P(A|H_3) = 1$

($P(A|H_0) = 0$ јер ако није погођен ниједном

не постоји вероватноћа да буде избачен

из строја !)

Сад можемо да применимо формулу

тоталне вероватноће :

$$P(A) = P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) +$$

$$+ P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$

$$= 0 \cdot 0,04 + 0,26 \cdot 0,3 + 0,46 \cdot 0,7 + 0,24 \cdot 1 = 0,64$$

2. Нпр, машина M_3 производи k ципела. Тада M_2 производи $3k$, а машина M_1 $2 \cdot 3k = 6k$ ципела. Те три машине производе 100% ципела (све ципеле у тој фабрици), па је $k + 3k + 6k = 100\%$ $\Rightarrow$ $10k = 100\%$
$k = 10\%$

То значи да је 10% ципела направљено на машини M_3 $(0,1)$, 30% $(=0,3)$ на машини M_2 и 60% $(=0,6)$ на M_1.

Дефинишимо догађај A – случајно одабрана ципела је врхунског квалитета.

Тада је, на основу текста задатка, свака ципела направљена или на M_1, или на M_2, или на M_3, па су хипотезе:

H_1 – ципела је направљена на машини M_1

H_2 – ципела је направљена на машини M_2

H_3 – ципела је направљена на машини M_3

$P(H_1) = 0,6$ $\quad$ $P(H_2) = 0,3$ $\quad$ $P(H_3) = 0,1$

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$ $\Rightarrow$ H_1, H_2 и H_3 чине потпун систем догађаја.

$$\left.\begin{aligned} P(A|H_1) &= 0,4 \\ P(A|H_2) &= 0,6 \\ P(A|H_3) &= 0,8 \end{aligned}\right\} \text{ НА ОСНОВУ ТЕКСТА ЗАДАТКА}$$

Применимо формулу тоталне вероватноће

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$= 0,6 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,5$$

је вероватноћа да случајно одабрана ципела буде врхунског квалитета.

Ако је случајно одабрана ципела из ове фабрике врхунског квалитета, колика је вероватноћа да је произведена на M_2 ?

Рачунамо помоћу Бајесове теореме :

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2 A)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,5}$$

3. Решење можете сами исписати за вежбу помоћу следећег општијег примера из уџбеника :

Zadatak 3. U jednoj kutiji se nalazi a belih i b plavih kuglica ($a \geq 3$, $b \geq 3$), a u drugoj c belih i d plavih kuglica. Na slučajan način se iz prve u drugu kutiju prebacuju 3 kuglice. Zatim se iz druge kutije izvlači jedna kuglica. a) Odrediti verovatnoću da je izvučena kuglica bele boje. b) Ako je izvučena bela kuglica, odrediti verovatnoću da su iz prve u drugu kutiju prebačene jedna plava i dve bele kuglice.

Rešenje. a) Sadržaj druge kutije zavisi od prebačenih kuglica iz prve kutije. Postoje četiri hipoteze:

H_1: iz prve u drugu kutiju prebačene su 3 bele kuglice,
H_2: iz prve u drugu kutiju prebačene su 2 bele i 1 plava kuglica,
H_3: iz prve u drugu kutiju prebačena je 1 bela i 2 plave kuglice,
H_4: iz prve u drugu kutiju prebačene su 3 plave kuglice.

Sledi, $P(H_1) = \dfrac{\binom{a}{3}}{\binom{a+b}{3}} = \dfrac{a(a-1)(a-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}$,

$$P(H_2) = \frac{\binom{a}{2}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{3}} = \frac{3ab(a-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)},$$

$$P(H_3) = \frac{\binom{a}{1}\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{3}} = \frac{3ab(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)},$$

$$P(H_4) = \frac{\binom{b}{3}}{\binom{a+b}{3}} = \frac{b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}.$$

Ako sa A označimo događaj da je iz druge kutije izvučena bela kuglica, tada, pošto je $H_iH_j = \phi$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$ i $\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1$ (proveriti), imamo primenom formule totalne verovatnoće:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{a(a-1)(a-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)} \cdot \frac{c+3}{c+d+3} +$$
$$+ \frac{3ab(a-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)} \cdot \frac{c+2}{c+d+3} + \frac{3ab(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)} \cdot$$
$$\cdot \frac{c+1}{c+d+3} + \frac{b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)} \cdot \frac{c}{c+d+3}.$$

b) Traži se verovatnoća $P(H_2|A)$. Odgovor daje Bajesova formula.

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2A)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}.$$

4. а) Новчаник смо или понели, или нисмо – то су онда хипотезе

H_1 – носим новчаник са собом $\quad P(H_1) = 0{,}7$

H_2 – не носим новчаник са собом $\quad P(H_2) = 0{,}3$

A – догађај да новчаник није у неком од 3 претресена џепа

Тада је $P(A|H_1) = \frac{2}{5}$, јер ако носим новчаник а он није у претресена 3 џепа, мора бити у преостала 2, а вероватноћа за то је $2 \cdot \frac{1}{5}$.

$P(A|H_2) = 1$ (ако га не носим, сигурно није у претресена 3 џепа)

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot \frac{2}{5} + 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}58$$

б) Ако се реализовао догађај A, тј. новчаник није у претресена 3 џепа, колика је вероватноћа да га носим?

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1A)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}28}{0{,}58} = 0{,}48$$

5. Дарко је добио мачку, али сумња да је алергичан. Тест за алергију на мачке није потпуно поуздан. За оне који су стварно алергични у 80% случајева потврди да јесу, али за оне који нису алергични у 10% случајева тест каже да јесу (да погрешан резултат). Зна се да 1% популације има алергију на мачке. Колика је вероватноћа да ће тест показати да је Дарко алергичан? Ако тест покаже да је Дарко алергичан, колика је вероватноћа да стварно јесте алергичан на мачке?

<u>Решење:</u> H_1 – Дарко је алергичан на мачке, $P(H_1) = 0,01$

H_2 – Дарко није алергичан на мачке, $P(H_2) = 0,99$

A – тест показује да је Дарко алергичан

$P(A|H_1) = 0,8$ (јер ако јесте алергичан, тест ће то потврдити у 80% случајева)

$P(A|H_2) = 0,1$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,01 \cdot 0,8 + 0,99 \cdot 0,1 = 0,107$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,008}{0,107} = 0,0748$$

Домаћи: На столу су 3 тањира са колачима. На првом тањиру је половина колача од чоколаде, на другом је три пута више колача од чоколаде него оних без чоколаде, а на трећем тањиру је сваки пети колач од чоколаде. Гост на случајан начин бира тањир и са њега један колач. Колика је вероватноћа да је изабрао колач без чоколаде? Ако у изабраном колачу нема чоколаде, колика је вероватноћа да је он са првог тањира?