Степени редови

Ред чији су чланови функције $f_n(x)$, $n=1,2,3,\dots$, дефинисане на неком непразном скупу D назива се ФУНКЦИОНАЛНИМ РЕДОМ, тј

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \equiv f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots$$

Скуп вредности $x\in D$ за које функционални ред конвергира образују област $D_0 \subset D$ коју називамо ОБЛАСТ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ функц. реда.

Специјално, за $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, где су a_n, $n=1,2,\dots$ константе, имамо СТЕПЕНИ или ПОТЕНЦИЈАЛНИ ред. Овај случај се сменом $x-x_0=t$ своди на случај $f_n(x)=a_n x^n$, па ћемо, стога, посматрати степени ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

За степени ред важи:

1° ПОЛУПРЕЧНИК КОНВЕРГЕНЦИЈЕ степеног реда рачуна се по формули

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

За $|x|<R$ реда апсолутно конвергира, за $|x|>R$ дивергира, док је за $x=\pm R$ потребно испитати конвергенцију

2° СУМА СТЕПЕНОГ реда $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрекидна је за $|x|<R$. Ако је R коначан број и ред конвергира за $x=R$, тада је сума $S(x)$ непрекидна и у тачки $x=R$. Аналогно важи и за $x=-R$

3° Интеграција степеног реда члан по члан $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

4° Диференцирање степеног реда члан по члан $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Табличне суме

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad x \in (-1,1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad x \in [-1,1)$$

Задаци:

Одредити област конвергенције и суму степеног реда:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{n+2} + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

ОБЛАСТ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ:

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{3^{n+3}} = \frac{1}{3}$$

област конвергенције првог реда $D_1: x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

област конв. другог реда $D_2: x \in (-1,1)$

Област конвергенције задатог реда $D = D_1 \cap D_2$, па је

$D: x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Други ред има ширу област конвергенције, $x \in (-1,1)$, па је конвергентан и за $x = \pm\frac{1}{3}$. Област конвергенције задатог реда ће зависити од понашања првог реда у тачкама $x = \pm\frac{1}{3}$.

Дакле, за $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+2} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3$$

општи члан овог реда је $a_n = 3$ и $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ па ред (Д). Ово значи да $x = \frac{1}{3}$ не укључујемо у обл кон

Проверимо сада за $x = -\frac{1}{3}$

$$\sum 3^{n+2} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum (-1)^{n+1} 3 \quad (Д)$$

Из истих разлога ни $x = -\frac{1}{3}$ не укључујемо у обл конвергенције

Зато је $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ обл конв. степеног реда

У области конвергенције степени ред има суму

СУМА СТЕПЕНОГ РЕДА

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+2}x^{n+1}+\sum\frac{1}{n+1}x^{n}=9x\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$S(x)=9x\cdot S_1(x)+S_2(x)$$

За одређивање суме $S_1(x)$ користимо развој

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^{n}=\frac{1}{1-t}$$ уведимо $3x=t$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^{n}=\frac{1}{1-3x}$$ имамо 1 члан вишка, па морамо да подесимо бројач на суми тако

$$(3x)^{0}+\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^{n}=\frac{1}{1-3x}$$ што избацујемо члан за $n=0$ из суме, и онда она креће од $n=1$

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^{n}=\frac{1}{1-3x}-1$$

$$S_1(x)=\frac{1-1+3x}{1-3x}\Rightarrow S_1(x)=\frac{3x}{1-3x}$$

За одређивање суме $S_2(x)$ користимо развој

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k}}{k}=-\ln(1-x)$$ сменимо $k=n+1$, за $k=1$, $n=0$ ово не мења ништа на десној страни

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$$ имамо 1 члан вишка, за $n=0$

$$\frac{x^{0+1}}{0+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$$

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)-x$$

$$S(x)=9x\cdot\frac{3x}{1-3x}-\ln(1-x)-x$$

2) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n}+(-1)^{n}}{n(n-1)}x^{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}2^{n}x^{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n-1)}x^{n}$$

О.К:

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n}(n+1)n}{n(n-1)2^{n+1}}=\frac{1}{2};\quad R_2=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{n(n-1)}=1\Rightarrow \text{О.К } x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$x=\frac{1}{2}:\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}2^{n}\frac{1}{2^{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}\ (К)$$ // крит. упоређ. 1

$$x=-\frac{1}{2}:\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}2^{n}\frac{(-1)^{n}}{2^{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n-1)}$$

1° $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n-1)}=0$

2° $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2(x-1)^2}\cdot(2x-1)$

$f'(x)=-\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}<0$ за $x>\frac{1}{2}\rightarrow a_n\downarrow$

по Лајбницовом крит. (К)

Област конв.:

$$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} (2x)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} (-x)^n = S_1(x) + S_2(x)$$

Ако одредимо суму реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$. помоћу ове суме лако се одређује $S_1(x)$ и $S_2(x)$.

$$\int \frac{dx}{1-x} \left| \begin{matrix} 1-x=t \\ dx=-dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln(t) = -\ln(1-x)$$

Кренимо од

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad / \int \qquad \text{интеграпимо члан по члан}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) + C_1 \qquad \text{одредимо одмах } C_1$$

за $x=0$: $0 = -\ln(1-0)+C_1 \Rightarrow C_1 = 0$. Дакле,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \quad / \int$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} = -\int \ln(1-x)\,dx = (1-x)\ln(1-x) - 1 + x + C_2$$

Одредимо C_2. $x=0 \Rightarrow 0 = -1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$

$m = n+2 \ / -1$

$m-1 = n+1$

смена: $n+2 = m$; $n=0 \Rightarrow m=2$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m(m-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$

за $S_1(x)$ суму довољно је да заменимо x са $2x$

$$S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n(n-1)} = (1-2x)\ln(1-2x) + 2x$$

за $S_2(x)$ суму мењамо x са $-x$

$$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} = (1+x)\ln(1+x) - x$$

Сума почетног реда је

$$S(x) = (1-2x)\ln(1-2x) + 2x + (1+x)\ln(1+x) - x$$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!} x^n$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3)\cdot(n+1)!}{n!\,((n+1)^2+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3)\cdot(n+1)}{n^2+2n+4} = +\infty \Rightarrow$ О.К. $x\in(-\infty,\infty)$

сума:

$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$S(x) = S_1(x) + 3S_2(x)$

Рачунамо $S_1(x)$:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \;/'$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x \;/\cdot x$ ☆

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = xe^x \;/'$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} = xe^x + e^x \;/\cdot x$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = x^2e^x + xe^x$

имамо члан вишка

$\frac{1}{0!} x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = (x^2+x)e^x$

$S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = (x^2+x)e^x - x$

Рачунамо $S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ имамо 2 чл вишка

$\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1$

$S(x) = (x^2+x)e^x - x + 3e^x - 3x - 3$

$S(x) = (x^2+x+3)e^x - 4x - 3$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} n^3 (x-2)^{n-2}$

О.К.

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1 \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$

за $x = 1 \Rightarrow x-2 = -1 \Rightarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty} n^3(-1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^3$ (Д) јер му општи члан не тежи ка 0

за $x = 3 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty} n^3 (1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n^3$ (Д) из истих разлога

Одавде добијамо да је област конвергенције $x\in(1,3)$

За одређивање суме датог реда, кренимо од

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \;/'$

$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \;/\cdot x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad /'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad /\cdot x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \quad /'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^{n-1} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4} \quad /: x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^{n-2} = \frac{x^2+4x+1}{x(1-x)^4}$$ имамо 2 чл. вишка

$$0\cdot x^{0-2} + 1\cdot x^{1-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n^3 x^{n-2} = \frac{x^2+4x+1}{x(1-x)^4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^3 x^{n-2} = \frac{x^2+4x+1}{x(1-x)^4} - \frac{1}{x} = \dots = -\frac{x^3-4x^2+5x-8}{(1-x)^4}$$

Сменимо x са $x-2$, добијамо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^3 (x-2)^{n-2} = -\frac{(x-2)^3-4(x-2)^2+5(x-2)-8}{(x-3)^4} = \dots$$

$$= -\frac{x^3-10x^2+33x-42}{(x-3)^4}$$