4.4. STEPENI REDOVI

Red čiji su članovi funkcije $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ definisane na nekom nepraznom skupu D naziva se **funkcijskim redom**, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \equiv f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots \tag{5}$$

Skup vrednosti $x \in D$ za koje red (5) konvergira obrazuju oblast $D_0 \subset D$ koju nazivamo **oblast konvergencije** reda (5).

Specijalno za $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$, gde su a_k $(k = 1, 2, \dots)$ konstante, imamo **stepeni ili potencijalni red**. Ovaj slučaj se smenom $x - x_0 = t$ svodi na slučaj $f_k(x) = a_k x^k$, pa ćemo, stoga, posmatrati stepeni red oblika

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{6}$$

Za red (6) važi sledeće:

1° **Poluprečnik konvergencije** reda (6) računa se po formuli (ako postoje granične vrednosti):

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{ili} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

U $(-R, R)$ red konvergira apsolutno, divergira za svako $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$, dok za $x = -R$ i $x = R$ posebno ispitujemo konvergenciju.

2° Suma stepenog reda

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in D_0,$$

neprekidna je za svako $x \in (-R, R)$. Ako je R konačan broj i red konvergira i za $x = R$, tada je suma $s(x)$ *neprekidna* i u tački $x = R$. Analogno važi i za $x = -R$.

3° Za svako $x \in (-R, R)$ važi:

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

(integracija stepenog reda član po član).

4° Za svako $x \in (-R, R)$ važi:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' dx = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

(diferenciranje stepenog reda član po član).

5° Važe sledeći razvoji u stepene redove:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1];$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1, 1); \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}; \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \alpha \in R; \quad x \in (-1, 1),$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Scanned with CamScanner

Zadatak 7. Naći oblast konvergencije i sumu sledećih redova:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(k+1)} x^k$; b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(2k+1)} x^{2k}$; c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2^k+(-1)^k}{k(k-1)} x^k$; ✓

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k!} x^k$; e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k+(-1)^k 3^k) x^k$.

Rešenja. a) $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^k}{k(k+1)} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$, pa red apsolutno konvergira za $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a divergira za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Za $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$ imamo redove $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ redom, koji konvergiraju apsolutno jer je $|a_k| = \frac{1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{k^2}$, $k \to \infty$, a red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira, pa je oblast konvergencije $O_k = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Nađimo sumu reda $s(x)$. Množenjem jednakosti

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(k+1)} x^k$$

sa $x, x \neq 0$, a potom diferenciranjem dobijamo

$$(x \cdot s(x))' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{k+1}}{k(k+1)}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k} = -\ln(1-2x),$$

$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$, pri čemu smo koristili razvoj funkcije $\ln(1-x)$ u stepeni red: $\ln(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $x \in [-1, 1)$. Iz gornje jednakosti integracijom (parcijalnom) dobijamo

$$\int_0^x (x\cdot s(x))'dx = x\cdot s(x) = \int_0^x (-\ln(1-2x))dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} u=\ln(1-2x) \\ dv = dx \end{array}\right) = -x\ln(1-2x) + x + \frac{1}{2}\ln(1-2x).$$

Odavde, deobom sa x, $x \neq 0$ dobijamo sumu reda $s(x)$:

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k(k+1)} = -\ln(1-2x) + 1 + \frac{1}{2x}\ln(1-2x), \quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\setminus\{0\}.$$

Ova jednakost važi i za $x=0$ i $x=\frac{1}{2}$ jer je

$$\lim_{x\to 0} s(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\ln(1-2x) + \frac{\ln(1-2x)}{2x} + 1\right) = 0-1+1=0$$

i $s(0)=0$ i pošto red konvergira za $x=\frac{1}{2}$, imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\left(-\ln(1-2x) + \frac{\ln(1-2x)}{2x} + 1\right) =$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\left(1+\ln(1-2x) + \left(\frac{1}{2x}-1\right)\right) = 1,$$

što se lako može pokazati nalaženjem sume neposredno po definiciji. Naime,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

b) Ako uvedemo smenu $t=x^2$ dobićemo stepeni red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}t^k$ čiji je poluprečnik konvergencije

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}\cdot\frac{(k+1)(2k+1)}{(-1)^k}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{k(2k-1)} = 1.$$

Za $t=1$ imamo red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}$, kod kojeg je moduo opšteg člana $|a_k| = \dfrac{1}{k(2k-1)} \sim \dfrac{1}{2k^2}$, $k\to\infty$, odakle sledi da numerički red apsolutno konvergira (dakle, i obično konvergira). Sledi da stepeni red konvergira za $0\le t\le 1$, odnosno da polazni red konvergira za $x^2\le 1$, tj. za $-1\le x\le 1$, pa je oblast konvergencije $O_k=[-1,1]$. Neka je $s(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}x^{2k}$. Diferencirajući dva puta imamo

$$s''(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{2k-2}=2\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^{k-1}=2\sum_{k=1}^{\infty}(-x^2)^{k}=\frac{2}{1+x}$$

Integracijom dobijamo

$$\int\limits_0^x s''(x)dx=s'(x)-s'(0)=s'(x)=2\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x^2}=2\operatorname{arc\,tg}x,$$

jer je $s'(0)=0$. $\int\limits_0^x s'(x)dx=s(x)-s(0)=s(x)=2\int\limits_0^x \operatorname{arc\,tg}x\,dx=$(parcijalnom integracijom: $u=\operatorname{arc\,tg}x$, $dv=dx$) $=2x\operatorname{arc\,tg}x-\ln(1+x^2)$, jer je $s(0)=0$. Dakle, suma reda je

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}x^{2k}=2x\operatorname{arc\,tg}x-\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$$

Napomena. Zadatak se može rešiti i tako što se dati red prikaže u obliku zbira dva reda:

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}x^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(-\frac{1}{k}+\frac{2}{2k-1}\right)x^{2k}=$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{2k}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k}=$$

$$=-\ln(1+x^2)+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1},\quad \text{itd.}$$

c) $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{k-1}\left|\dfrac{2^k+(-1)^k}{2^{k+1}+(-1)^{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{k-1}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1+\dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}}{1+\dfrac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}}=\dfrac{1}{2}$, pa red apsolutno konvergira za $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, a divergira za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.Za $x = -\frac{1}{2}$ dobijamo numerički red

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{k(k-1)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k \cdot (k-1)}.$$

Pošto oba reda konvergiraju (prvi jer je $\frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}$), a drugi primenom Dalamberovog kriterijuma, gde je $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2} < 1$ to i polazni red konvergira kao zbir konvergentnih redova. Analogno zaključujemo za $x = \frac{1}{2}$, pa je oblast konvergencije $O_k = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ako je $s(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{k(k-1)} x^k$, tada diferenciranjem dva puta dobijamo:

$$s''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (2^k + (-1)^k) x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+2} + (-1)^{k+2}) x^k =$$

$$= 2^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 4 \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-(-x)}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

odakle integracijom dobijamo

$$\int_0^x s''(x)dx = s'(x) - s'(0) = -2\ln(1-2x) + \ln(1+x), \quad s'(0) = 0;$$

$$\int_0^x s'(x)dx = s(x) - s(0) = -2\int_0^x \ln(1-2x)dx + \int_0^x \ln(1+x)dx, \quad s(0) = 0,$$

pa je konačno,

$$s(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{k(k-1)} x^k =$$

$$= (1-2x)\ln(1-2x) + x + (x+1)\ln(1+x), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

(pošto ova jednakost važi i za $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$, jer red konvergira za ove vrednosti i postoje limesi

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} s(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}+0} s(x) = 2\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}).$$