

Polinomi i racionalne funkcije

- **Polinom** stepena $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je funkcija $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oblika

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Realni brojevi $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ su **koeficijenti** polinoma, gde je $a_n \neq 0$ **vođeći koeficijent**, a a_0 **slobodan član** polinoma. Polinom kod kojeg je $a_n = 1$ naziva se **normiran** polinom. Polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nuli je **nula** polinom.

- Dva polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ su **jednaka**, ako su istog stepena ($n = m$) i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene od x jednaki.
- Dva polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ se **sabiraju (oduzimaju)** tako što se sabiraju (oduzimaju) koeficijenti uz odgovarajuće stepene od x .
- **Proizvod** polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ je polinom $R_{n+m}(x)$.
- **Deljenje.** Za svaka dva polinoma P_n i Q_m , $Q_m \neq 0$, $n \geq m$ postoje jedinstveni polinomi S_p i R_k , takvi da je

$$P_n = Q_m \cdot S_p + R_k, \text{ tj. } \frac{P_n}{Q_m} = S_p + \frac{R_k}{Q_m},$$

gde je $p = n - m$, $k < m$. Polinom S_p se naziva **količnik**, a polinom R_k **ostatak** deljenja. Ako je ostatak jednak nuli, tada je polinom P_n **deljiv** polinomom Q_m .

- **Bezuov stav.** Ostatak pri deljenju polinoma $P_n(x)$ sa $x - c$ je $P_n(c)$.
- **Nula (koren)** polinoma $P_n(x)$ je ona vrednost promenljive x za koju je vrednost polinoma jednaka nuli, odnosno

$$P_n(x) = 0.$$

- Ako je kompleksan broj $a + bi$ nula nekog polinoma, tada je i njemu konjugovano kompleksan broj $a - bi$, takodje, nula datog polinoma.
- Ako je polinom $P_n(x)$ deljiv sa $(x - c)^p$, kažemo da je $x = c$ **nula reda p** (koren višestrukosti p) polinoma $P_n(x)$.
- Svaki polinom stepena n se na jedinstven način može faktorisati u skupu $\mathbb{C}$ na sledeći način:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_p)^{k_p},$$

gde su $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{C}$ nule datog polinoma, a $k_1, k_2, \dots, k_p$ redom njihove višestrukosti ($k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$).

- U slučaju da polinom ima nule koje nisu realni brojevi, tada njegova faktorizacija u skupu $\mathbb{R}$ izgleda ovako:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{j_1} \cdots (x^2 + b_sx + c_s)^{j_s},$$

gde je $k_1 + \cdots + k_r + 2(j_1 + \cdots + j_s) = n$.

- Neka je dat polinom:

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n, a_0 \neq 0.$$

Racionalan broj $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ je moguća nula polinoma $P_n(x)$ ako p deli slobodan član, a q deli koeficijent uz najviši stepen od x , u oznaci $p|a_0$ i $q|a_n$.