

NEODREDJENI INTEGRAL

- Definicija primitivne funkcije i primeri

- $f(x) \rightarrow f'(x)$,

$$\sin x \rightarrow \cos x, e^x \rightarrow e^x \dots$$

$$f(x) \rightarrow F(x), \text{ tako da je } F'(x) = f(x)!$$

$$\sin x \rightarrow -\cos x, e^x \rightarrow e^x \dots$$

Definicija: Funkcija $F(x)$ je primitivna funkcija za funkciju $f(x)$ ako je diferencijabilna na intervalu (a, b) i ako je

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

- Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za funkciju $f(x)$ onda je i $F(x) + C$ takodje primitivna funkcija za funkciju $f(x)$.
- Ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ primitivne funkcije za funkciju $f(x)$ onda je $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Definicija: Skup svih primitivnih funkcija za funkciju $f(x)$ naziva se neodredjeni integral funkcije $f(x)$ i označava sa

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

-

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

- Osobine:

1.

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

2.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3.

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

4.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

- Tablica neodređenih integrala
- Metoda neposredne integracije

Sastoji se u algebarskim transformacijama podintegralne funkcije, korišćenju osobina 1-4 i korišćenju tablice.

Primer:

$$\int \frac{\sqrt{x} + x^3 + 5}{x} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^2 + 5x^{-1} \right) dx = \dots$$

- Metoda smene promenljive

•

$$\int \sqrt{2x + 3} dx = ?$$

Tvrđenje: Neka je funkcija $x = \varphi(t)$ diferencijabilna na intervalu (α, β) i neka je interval (a, b) skup vrednosti te funkcije na kome je definisana funkcija $f(x)$. Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za funkciju $f(x)$ tada i funkcija $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ima primitivnu funkciju $F(\varphi(t))$, tj. važi formula

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

- Češće se koristi smena $t = \psi(x)$!

Primeri:

1.

$$\int \sqrt{2x+3} dx = \int \sqrt{t} \cdot 2 dt = 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \ln^2 x + C.$$

- Metoda parcijalne integracije

•

$$\int \operatorname{arctg} x dx = ?$$

Tvrđenje: Neka su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne na nekom intervalu (a, b) i neka na tom intervalu postoji primitivna funkcija za funkciju $u'(x)v(x)$. Tada postoji i primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i važi formula

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

•

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Dokaz:

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Integralimo obe strane i dobijamo

$$\int d(uv) = \int [du \cdot v + u \cdot dv],$$

tj,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$