Diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_0 y(x) = 0, \tag{1}$$

gde $x \in (-\infty, \infty)$ i gde su $p_0, \ldots, p_{n-1}$ dati brojevi, zove se *homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.*

U skladu sa rečenim u prethodnom paragrafu, da bismo rešili jednačinu (1), potrebno je da nađemo fundamentalni sistem rešenja. Potražićemo ga u obliku $y = e^{kx}$, gde je k neka konstanta. Tada je

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Ubacujući funkciju i odgovarajuće izvode u posmatranu jednačinu, dobijamo

$$e^{kx}[k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0] = 0.$$

Pošto je $e^{kx} \neq 0$, imamo da je

$$R_n(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0. \tag{2}$$

Prema tome, ako je k rešenje algebarske jednačine (2), onda je funkcija $y(x) = e^{kx}$ rešenje diferencijalne jednačine (1), i obrnuto. Jednačina (2) se zove *karakteristična jednačina* diferencijalne jednačine (1). Lako je videti da se karakteristična jednačina formira tako što se u jednačini (1) $y^{(j)}$ zameni sa k^j, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Na osnovu osnovnog stava algebre je poznato da jednačina (2) ima n nula, realnih ili kompleksnih. Napomenimo da neke nule mogu biti jednake a da se kompleksne nule javljaju kao konjugovano-kompleksni par (pošto je u pitanju polinom sa realnim koeficijentima).

Mogući su sledeći slučajevi:

1. Pretpostavimo da su sve nule jednačina (2) različite i jednake $k_1, \ldots, k_n$. Tada su funkcije

$$e^{k_1 x},\ e^{k_2 x}, \ldots e^{k_n x} \tag{3}$$

rešenja jednačine (1) i pri tome obrazuju fundamentalni sistem rešenja, pošto smo već pokazali da su sve funkcije linearno nezavisne. U tom slučaju, na osnovu ranije rečenog, imamo opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{ix}.$$

Primer 0.1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Karakteristična jednačina je oblika

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Njene nule su $k_1 = -1$ *i* $k_2 = -2$. *Prema tome, opšte rešenje je dato sa*

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Ukoliko se u skupu rešenja karakteristične jednačine nalazi i konjugovano-kompleksni par $\alpha \pm \beta i$, onda se može pokazati da su funkcije

$$e^{\alpha x} \cos \beta x$$

i

$$e^{\alpha x} \sin \beta x$$

partikularna rešenja jednačine (1). Onda će, u opštem rešenju, takvom konjugovano-kompleksnom paru odgovarati izraz

$$C_i e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{i+1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Primer 0.2 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y''' + 8y = 0.$$

Karakteristična jednačina je oblika

$$k^3 + 8 = 0.$$

Njene nule su $k_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ *i* $k_3 = -2$. *Prema tome, opšte rešenje je dato sa*

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} \cos \sqrt{3}x + C_3 e^{x} \sin \sqrt{3}x.$$

2. Pored slučaja 1. gde su sva rešenja karakteristične jednačine različita, može se desiti i da su neka rešenja *nule višeg reda*. Pretpostavimo na primer da je k_1 realna nula reda m. Tada u sistemu (3) imamo m jednakih funkcija

$$e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x},\ k_1 = \ldots = k_m.$$

Na taj način sistem (3) prestaje da bude skup linearno nezavisnih funkcija. Međutim, može se pokazati da u takvom slučaju možemo umesto skupa funkcija

$$e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x},$$

uzeti skup

$$e^{k_1 x}, xe^{k_1 x} \ldots, x^{m-1} e^{k_1 x}.$$

Lako se proverava da je svaka od funkcija iz tog skupa rešenje diferencijalne jednačine (1), kao i da je to skup linearno nezavisnih funkcija.

Primer 0.3 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

U ovom slučaju, karakteristična jednačina je oblika

$$k^2 - 8k + 16 = 0.$$

Njene nule su $k_{1,2} = 4$. *Dakle, opšte rešenje je dato sa*

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Slično kao u realnom slučaju, može se pokazati, da ukoliko su konjugovano-kompleksni parovi nule reda m karakteristične jednačine (2), onda će takvim rešenjima u opštem rešenju odgovarati linearna kombinacija (linearno nezavisnih) funkcija

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

i

$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Primer 0.4 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Karakteristična jednačina je oblika

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0$$

ili

$$(k^2 + 1)^2 = 0.$$

Znači $k_1 = i$ *i* $k_2 = -i$ *su nule drugog reda. Dakle, opšte rešenje je dato sa*

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$$