Diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_0(x)y(x) = f(x), \tag{1}$$

gde $x \in (a,b)$ i gde su $f(x), p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ date funkcije koje su neprekidne na intervalu (a,b), zove se *linearna diferencijalna jednačina n-tog reda.*

Ako je

$$f(x) = 0, \; \forall x \in (a,b),$$

onda za datu jednačinu kažemo da je *homogena.* U skladu sa tim, kada $f(x)$ nije identički jednaka nuli, za datu jednačinu kažemo da je *nehomogena.*

Uz pretpostavku o neprekidnosti funkcija $f(x)$, $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, može se pokazati da diferencijalna jednačina (1) ima jedinstveno rešenje definisano na intervalu (a,b), koje zadovoljava početne uslove

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Pored toga, važi i sledeća teorema:

Teorema 0.1 *Ako su $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_k(x)$ rešenja homogene jednačine*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_0(x)y(x) = 0,$$

onda je i njihova linearna kombinacija

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x),$$

gde su $C_1, \ldots, C_k$ proizvoljne konstante, takođe rešenje posmatrane homogene jednačine.

Dokaz. Potražimo najpre izvode funkcije $y(x)$. Imamo da je

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i^{(n)}(x), \ldots, y'(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i'(x).$$

Ubacimo izvode u posmatranu jednačinu. Dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} C_i y_i^{(n)}(x) + \ldots + p_0(x) \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x) = \\
C_1 \left(y_1^{(n)}(x) + \ldots + p_0(x)y_1(x) \right) + \\
+ C_2 \left(y_2^{(n)}(x) + \ldots + p_0(x)y_2(x) \right) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ C_k \left(y_k^{(n)}(x) + \ldots + p_0(x)y_k(x) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da je $y(x)$ rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Definisaćemo i pojam linearno nezavisnog sistema funkcija koji će nam trebati ubuduće.

Definicija 0.1 *Za funkcije $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ kažemo da su linearno nezavisne na intervalu (a, b) ako se nijedna od njih ne može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih za sve $x \in (a, b)$.*

U suprotnom, za funkcije $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ kažemo da su *linearno zavisne.*

Koristeći pojam linearne nezavisnosti funkcija, definisaćemo pojam *fundamentalnog sistema rešenja.*

Definicija 0.2 *Skup $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ od n linearno nezavisnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $n-$tog reda zove se fundamentalni sistem rešenja te jednačine.*

Važi sledeća teorema:

Teorema 0.2 *Ako su funkcije $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $n-$tog reda kod koje su koeficijenti $p_i(x)$ neprekidne funkcije, onda je*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

opšte rešenje te jednačine.

Prema tome, za nalaženje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $n-$tog reda, dovoljno je naći n linearno nezavisnih rešenja te jednačine i napraviti njihovu linearnu kombinaciju. Napomenimo da smo takav skup rešenja nazvali fundamentalni sistem rešenja.

Dakle, možemo zaključiti da provera linearne zavisnosti odnosno nezavisnosti skupa funkcija (rešenja), igra važnu ulogu u formiranju opšteg rešenja diferencijalne jednačine (1). U tom cilju, sledeća teorema je vrlo korisna.

Teorema 0.3 *Ako su funkcije $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ linearno zavisne i imaju izvode do reda $m-1$, onda je determinanta*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

jednaka nuli za sve $x \in (a, b)$.

Prethodna determinanta se zove Vronskijeva determinanta i obično se označava sa $W(x)$ ili $W[y_1, \dots, y_m]$. Iz prethodne teoreme je očigledno da ako je $W(x) \neq 0$ za bar jednu tačku iz intervala (a, b), onda su funkcije $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_m(x)$ linearno nezavisne.

Primer 0.1 *Pokazati da su funkcije* $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}, \dots e^{k_m x}$, $k_1, \dots, k_m$ *su različiti realni brojevi, linearno nezavisne na bilo kom intervalu* (a, b).

Nađimo Vronskijevu determinantu za prethodni sistem funkcija. Poznato je da je

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}, \dots, (e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

Prema tome,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \dots & k_m e^{k_m x} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & \dots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix}.$$

Posle elementarnih transformacija (izvlačenjem zajedničkih činilaca iz svih kolona), imamo da je prethodna determinanta jednaka

$$W(x) = e^{(k_1 + \dots + k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & k_m \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Može se dokazati da je

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & k_m \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

i ta determinanta je poznata u literaturi kao Vandermondova determinanta. Pošto je

$$e^{(k_1 + \dots + k_m)x} > 0, \quad \forall x \in R,$$

zaključujemo da posmatrane funkcije čine linearno nezavisni skup funkcija.

Konačno, primetimo da se opšte rešenje nehomogene jednačine može dobiti kao zbir nekog njenog partikularnog rešenja i opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine, tj. da važi tvrđenje:

Teorema 0.4 *Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) dobija se kao zbir nekog njenog partikularnog rešenja* $y_0(x)$ *i opšteg rešenja* $y_h(x)$ *odgovarajuće homogene jednačine, tj. važi*

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x).$$

Dokaz. Ubacujući

$$y_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

u jednačinu (1) i uzimajući u obzir da je

$$y_0^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) y_0^{(n-1)}(x) + \ldots + p_0(x) y_0(x) = f(x)$$

i

$$y_h^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) y_h^{(n-1)}(x) + \ldots + p_0(x) y_h(x) = 0,$$

lako vidimo da tvrđenje važi.