

Diferencijalne jednačine drugog reda su jednačine oblika

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Ukoliko je data jednačina rešiva po drugom izvodu tada imamo eksplicitni oblik diferencijalne jednačine drugog reda

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1)$$

Po analogiji sa diferencijalnim jednačinama prvog reda može se postaviti pitanje egzistencije i pitanje jedinstvenosti rešenja koje prolazi kroz neku datu tačku. U tom cilju, najpre ćemo definisati Košijev problem.

**Definicija 0.1** *Košijev problem za diferencijalnu jednačinu drugog reda (1) se sastoji u nalaženju onog rešenja diferencijalne jednačine (1), za koje važi*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

gde su  $x_0, y_0$  i  $y'_0$  dati brojevi.

Kao što smo videli u uvodnom poglavlju i posmatrajući diferencijalne jednačine prvog reda, zaključujemo da će rešenje jednačine (1), u opštem slučaju, zavisiti od dve konstante. Prema tome, za njihovo određivanje potrebna su dva početna uslova  $y(x_0) = y_0$  i  $y'(x_0) = y'_0$ .

Naravno, postavlja se pitanje egzistencije i jedinstvenosti takve integralne krive, a odgovor daje sledeća varijanta Košijeve teoreme.

**Teorema 0.1** *Košijev problem za diferencijalnu jednačinu drugog reda (1) ima jedinstveno rešenje u svakoj tački zatvorene oblasti*

$$D = \{(x, y, y'), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq y' \leq f\},$$

ako je funkcija  $f(x, y, y')$  neprekidna na skupu  $D$  zajedno sa svojim parcijalnim izvodima  $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$  i  $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$ .

Takvu funkciju, koja predstavlja rešenje Košijevog problema, zgodno je zapisivati u obliku  $y = y(x_0, y_0, y'_0)$ , gde su  $y_0$  i  $y'_0$  dati brojevi. Možemo ih označiti sa  $C_1 = y_0$  i  $C_2 = y'_0$  i možemo smatrati da su to proizvoljni brojevi takvi da je trojka  $(x_0, C_1, C_2)$  u pomenutom skupu  $D$ . Na taj način, dobijamo da rešenje diferencijalne jednačine zavisi od dva parametra, tj. dve konstante  $C_1$  i  $C_2$ .

**Primer 0.1** *Naći integralnu krivu diferencijalne jednačine*

$$y'' + y = 0$$

za koju je  $y(0) = 1$  i  $y'(0) = 0$ .

*Lako se može proveriti da je*

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

rešenje prethodne jednačine. Zbog  $C_1 = y(0) = 1$  i  $C_2 = y'(0) = 0$ , dobijamo da je tražena integralna kriva  $y = \cos x$ .

Kao što smo već pomenuli, diferencijalne jednačine  $n$ -tog reda su jednačine oblika

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Ako se jednačina može rešiti po  $y^{(n)}$ , onda imamo eksplicitni oblik

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Analogno kao za diferencijalne jednačine drugog reda, može se definisati Košijev problem:

**Definicija 0.2** *Košijev problem za diferencijalnu jednačinu  $n$ -tog reda (2) se sastoji u nalaženju onog rešenja diferencijalne jednačine (1) za koje je*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

gde su  $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  dati brojevi.

Odgovarajuća Košijeva teorema u ovom slučaju glasi:

**Teorema 0.2** *Košijev problem za diferencijalnu jednačinu  $n$ -tog reda (1) ima jedinstveno rešenje u svakoj tački zatvorene oblasti*

$$D = \{(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), a \leq x \leq b, c_i \leq y^{(i)} \leq d_i, i = 0, \dots, n-1\}$$

ako je funkcija  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  neprekidna na skupu  $D$  zajedno sa svojim parcijalnim izvodima

$$\frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(n-1)}}.$$

U nekim slučajevima je diferencijalnu jednačinu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

moguće svesti na diferencijalnu jednačinu nižeg reda uvođenjem nove nepoznate funkcije. Razmotrićemo 2 takva slučaja za  $n = 2$ .

I Pretpostavimo da prethodna diferencijalna jednačina ne zavisi eksplisitno od  $y$ , tj. neka je oblika

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Uvedimo novu funkciju  $z(x) = y'(x)$ . Tada je  $z'(x) = y''(x)$ . Očigledno je da polazna jednačina postaje

$$F(x, z, z') = 0,$$

tj. ona postaje diferencijalna jednačina prvog reda po promenljivoj  $z$ . Pretpostavimo da smo tu jednačinu rešili i našli funkciju  $z(x, C_1)$  definisanu na nekom intervalu  $(a, b)$ . Tada je potrebno rešiti i polaznu jednačinu u kojoj je nepoznata funkcija bila  $y(x)$ . Iz  $z(x) = y'(x)$  integracijom obe strane dobijamo

$$y(x) = \int z(x, C_1) dx + C_2.$$

**Primer 0.2** *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' - y' \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$$

*Uvedimo novu funkciju  $z(x) = y'(x)$ . Tada posmatrana jednačina postaje linearna diferencijalna jednačina po funkciji  $z$ :*

$$z' - z \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$$

*Rešavajući tu jednačinu dobijamo da je*

$$z(x) = (x^2 + C_1) \sin x.$$

*Odatle, imamo da je*

$$y'(x) = (x^2 + C_1) \sin x.$$

*Integracijom konačno dobijamo da je*

$$y(x) = -(x^2 + C_1) \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_2.$$

II Pretpostavimo da posmatrana diferencijalna jednačina ne zavisi eksplicitno od  $x$ , tj. neka je oblika

$$F(y, y', y'') = 0.$$

U takvoj jednačini možemo smatrati da ulogu nezavisno promenljive igra  $y$  a da je tražena funkcija  $y' = z(y)$ . Tada imamo da je

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z.$$

Napomenimo da smo u prethodnim jednakostima koristili teoremu o izvodu složene funkcije. Na taj način, polazna jednačina postaje diferencijalna jednačina prvog reda po funkciji  $z$ . Neka je  $z(y, C_1)$  rešenje te jednačine koje nije identički jednako nuli i koje je definisano na nekom intervalu  $(c, d)$ . Pošto je

$$z(y) = \frac{dy}{dx},$$

imamo da je

$$dx = \frac{dy}{z(y)},$$

tj.

$$x = \int \frac{dy}{z(y)} + C_2, \quad y \in (c, d).$$

Na taj način smo dobili rešenje polazne jednačine u *implicitnoj formi*, gde je nezavisno promenljiva  $x$  funkcija zavisno promenljive  $y$ . Osim toga, ako je moguće resiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = z(y),$$

onda dobijamo opšte rešenje ili opsti integral polazne.

**Primer 0.3** *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2.$$

*Uvedimo smenu  $y' = z(y)$ . Tada je  $y'' = z \cdot z'$  i polazna jednačina postaje*

$$z \cdot z' \operatorname{tg} y = 2z^2.$$

Ako je  $z = 0$ , onda je  $y' = 0$ , pa je  $y = C$  njeno rešenje. Ako  $z \neq 0$ , onda, posle skraćivanja obe strane sa  $z$ , dobijamo diferencijalnu jednačinu prvog reda sa razdvojenim promenljivim:

$$z' \operatorname{tg} y = 2z.$$

Njenim rešavanjem dobijamo da je

$$z = C_1 \sin^2 y,$$

tj.

$$y' = C_1 \sin^2 y.$$

Na taj način smo ponovo dobili diferencijalnu jednačinu prvog reda sa razdvojenim promenljivim čijim rešavanjem dobijamo opšti integral polazne jednačine

$$- \operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2.$$