Kao poseban slučaj homogenih linearnih sistema diferencijalnih jednačina, posmatraćemo one sisteme kod kojih su funkcije $a_{ij}(x)$ konstante. Dakle, posmatraćemo sistem

$$HLSK: \begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x), \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x), \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x), \end{cases}$$

gde su a_{ij} dati realni brojevi. U matričnom obliku prethodni sistem možemo napisati kao

$$\boldsymbol{y}'(x) = A\boldsymbol{y}(x), \tag{1}$$

gde je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{nn}. \end{bmatrix}$$

Slično kao kod homogene linerane diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima, rešenje ćemo potražiti u obliku

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \ldots, y_n = \alpha_n e^{\lambda x}, \tag{2}$$

tj.

$$\boldsymbol{y}(x) = (\alpha_1 e^{\lambda x}, \ldots, \alpha_n e^{\lambda x}).$$

Lako je videti da za

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

imamo trivijalno rešenje sistema

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0.$$

Potražićemo i netrivijalna rešenja. Imamo da je

$$y_1'(x) = \alpha_1 \lambda e^{\lambda x}, \ldots, y_n'(x) = \alpha_n \lambda e^{\lambda x}.$$

Ubacujući funkcije $y_i(x)$ i njihove izvode u sistem HLSK, dobijamo

$$\begin{gathered}
\alpha_1\lambda e^{\lambda x} = a_{11}\alpha_1 e^{\lambda x} + \ldots a_{1n}\alpha_n e^{\lambda x},\\
\alpha_2\lambda e^{\lambda x} = a_{21}\alpha_1 e^{\lambda x} + \ldots a_{2n}\alpha_n e^{\lambda x},\\
\vdots\\
\alpha_n\lambda e^{\lambda x} = a_{n1}\alpha_1 e^{\lambda x} + \ldots a_{nn}\alpha_n e^{\lambda x}.
\end{gathered}$$

Deleći u svakoj jednačini obe strane sa $e^{\lambda x}$, dobijamo

$$\begin{gathered}
\alpha_1\lambda = a_{11}\alpha_1 + \ldots a_{1n}\alpha_n,\\
\alpha_2\lambda = a_{21}\alpha_1 + \ldots a_{2n}\alpha_n,\\
\vdots\\
\alpha_n\lambda = a_{n1}\alpha_1 + \ldots a_{nn}\alpha_n.
\end{gathered}$$

Prebacujući sve na jednu stranu i grupišući odgovarajuće članove, dobijamo homogeni sistem linearnih jednačina po nepoznatim $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ koji zavisi od parametra λ:

$$\begin{gathered}
(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0,\\
a_{11}\alpha_1 + (a_{12} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0,\\
\vdots\\
a_{11}\alpha_1 + \ldots + (a_{1n} - \lambda)\alpha_n = 0.
\end{gathered}$$

Možemo ga zapisati i u matričnoj formi

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{a} = 0, \tag{3}$$

gde je

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

i gde je E odgovarajuća jedinična matrica

$$E = \begin{bmatrix} 1 \ldots\ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix}.$$

Iz linearne algebre je poznato da homogeni kvadratni sistem linearnih jednačina ima netrivijalnih rešenja ako i samo ako mu je determinanta jednaka nuli.

Prema tome, u našem slučaju ćemo imati netrivijalnih rešenja po $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ako je

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Prethodna jednačina po λ, koja se dobija razvijanjem determinante, naziva se *karakteristična jednačina sistema HLSK*. Rešavajući karakterističnu jednačinu mi dobijamo odgovarajuće vrednosti parametra λ preko kojih formiramo opšte rešenje polaznog sistema.

Razvijajući determinantu D, dobijamo polinom stepena n. Rešavajući ga, dobijamo n rešenja (ne obavezno različitih). Ubacujući svako od rešenja u (3), dobijamo n rešenja sistema po $\boldsymbol{a}$. Naravno, svako od rešenja je jedna uređena $n-$torka. Na taj način dobijamo skup odgovarajućih rešenja

$$\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x),$$

pa će opšte rešenje sistema LSH biti

$$\boldsymbol{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \boldsymbol{y}^i(x).$$

Radi jednostavnosti, prikazaćemo postupak traženja opšteg rešenja na sistemima diferencijalnih jednačina reda 2. U tom slučaju, karakteristična jednačina sistema je kvadratna jednačina pa su mogući sledeći slučajevi:

1. Rešenja karakteristične jednačine su realna i različita, tj. par

$$(\lambda_1, \lambda_2).$$

Tada će opšte rešenje sistema HLSK biti

$$y_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{4}$$
$$y_2(x) = D_1 e^{\lambda_1 x} + D_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{5}$$

Nepoznati koeficijenti se određuju tako što se jedna od prethodnih funkcija ubaci u sistem. Treba napomenuti da je tako dobijeno rešenje nejednoznačno.

Primer 0.1 *Rešiti sistem*

$$y_1' = 2y_1 + 3y_2,$$
$$y_2' = 6y_1 - y_2.$$

Sastavimo karakterističnu jednačinu sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijajući determinantu, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0,$$

čija su rešenja

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 5.$$

Potražimo rešenje u obliku

$$y_1(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x},$$

$$y_2(x) = D_1 e^{-4x} + D_2 e^{5x}.$$

Izrazićemo koeficijente D_1 i D_2 preko C_1 i C_2. Ubacićemo jednu od tako datih funkcija u sistem. Ako ubacimo y_1, dobijamo

$$-4C_1 e^{-4x} + 5C_2 e^{5x} = 2(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x}) + 3(D_1 e^{-4x} + D_2 e^{5x}).$$

Odatle je

$$-4C_1 = 2C_1 + 3D_1$$

i

$$5C_2 = 2C_2 + 3D_2.$$

Prema tome, dobijamo da je

$$D_1 = -2C_1, \quad D_2 = C_2$$

pa je opšte rešenje sistema dato sa

$$y_1(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x},$$

$$y_2(x) = -2C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x}.$$

2. Pretpostavimo najpre da je λ koren reda 2. Tada će opšte rešenje sistema HLSK biti

$$y_1(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, \tag{6}$$
$$y_2(x) = (D_1 + D_2 x)e^{\lambda_2 x}. \tag{7}$$

Primer 0.2 *Rešiti sistem*

$$y_1' = y_1 - y_2,$$
$$y_2' = y_1 + 3y_2.$$

Razvijajući determinantu, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

čije je dvostruko rešenje $\lambda = 2$. *Potražimo rešenje u obliku*

$$y_1(x) = (C_1 + xC_2)e^{2x},$$

$$y_2(x) = (D_1 + xD_2)e^{2x}.$$

Ubacujući prethodne jednakosti u sistem, dobijamo

$$C_2 + 2C_1 + 2C_2x = C_1 + C_2x - D_1 - D_2x,$$

$$D_2 + 2D_1 + 2D_2x = C_1 + C_2x + 3(D_1 + D_2x).$$

Iz prve jednakosti dobijamo da je

$$D_1 = -C_1 - C_2, \quad D_2 = -C_2.$$

Druga jednakost daje ista rešenja. Prema tome, opšte rešenje sistema je

$$y_1(x) = (C_1 + xC_2)e^{2x},$$

$$y_2(x) = -(C_1 + C_2 + C_2x)e^{2x}.$$

3. Pretpostavimo najpre da su $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ konjugovano kompleksni par. Tada će opšte rešenje sistema HLSK biti

$$y_1(x) = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{8}$$
$$y_2(x) = (D_1 \cos\beta x + D_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}. \tag{9}$$

Primer 0.3 *Rešiti sistem*

$$y_1' = 4y_1 - y_2,$$
$$y_2' = 5y_1 + 2y_2.$$

Razvijajući determinantu, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

čije je rešenje $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. *Potražimo rešenje u obliku*

$$y_1(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x},$$

$$y_2(x) = (D_1 \cos 2x + D_2 \sin 2x)e^{3x}.$$

Analogno kao u prethodna dva slučaja, ubacujući prethodne jednakosti u polazni sistem, dobijamo da je opšte rešenje sistema

$$y_1(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x},$$

$$y_2(x) = ((C_1 - 2C_2) \cos 2x + (2C_1 + C_2) \sin 2x)e^{3x}.$$