Definicija 0.1 *Skup diferencijalnih jednačina*

$$S' : \begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2' \dots, y_n, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2' \dots, y_n, y_n') = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', y_2, y_2' \dots, y_n, y_n') = 0, \end{cases}$$

gde je x nezavisno promenljiva i gde su $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$,...,$y_n = y_n(x)$ nepoznate funkcije, zove se sistem od n diferencijalnih jednačina prvog reda.

Normalnim sistemi:

$$S : \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Definicija 0.2 *Rešenje sistema diferencijalnih jednačina S je uređena $n-$torka funkcija $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ koje su diferencijabilne na nekom intervalu (a, b), i koje zadovoljavaju svaku od jednačina sistema S za svako $x \in (a, b)$.*

Za sistem S se može definisati i Košijev problem na sledeći način.

Definicija 0.3 *Neka je $(x_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ data tačka iz oblasti D. Košijev problem za sistem S se sastoji u nalaženju onog rešenja $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ sistema S, koje je definisano u nekoj okolini tačke x_0, i za koje važe početni uslovi*

$$y_1(x_0) = y_1,\ y_2(x_0) = y_2, \dots, y_n(x_0) = y_n. \tag{1}$$

Po ugledu na diferencijalne jednačine prvog reda, formulisaćemo Košijevu teoremu koja govori o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja sistema S.

Teorema 0.1 *Košijev problem za normalan sistem diferencijalnih jednačina S ima jedinstveno rešenje u svakoj tački $M(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ oblasti*

$$D = \{(x, y_1, \dots y_n),\ a \le x \le b,\ c \le y_i \le d,\ i = 1, \dots, n\},$$

ako su funkcije $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ neprekidne na D zajedno sa svojim parcijalnim izvodima

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, \dots y_n)}{\partial y_j}, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n.$$

0.1 Opšte i partikularno rešenje

Posmatraćemo normalan sistem diferencijalnih jednačina S.

Neka je x_0 fiksirana tačka i neka su $y_1, \ldots, y_n$ parametri koji mogu uzimati razne vrednosti, takve da je tačka $M(x_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ unutar oblasti D, i neka važe uslovi Košijeve teoreme. Uvedimo oznake

$$y_1 = C_1, \ldots, y_n = C_n.$$

Definicija 0.4 *Rešenje*

$$y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sistema S ćemo zvati opštim rešenjem u oblasti D, ako za svaku tačku $(x_0^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) \in D$, postoje parametri $C_1^*, \ldots, C_n^*$, takvi da je

$$y_i^* = y_i(x_0^*, C_1^*, \ldots, C_n^*), \quad i = 1, \ldots, n,$$

i takvi da je sistem funkcija

$$y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

rešenje Košijevog problema sistema S sa početnim uslovima

$$y_1(x_0^*) = y_1^*, \ldots, y_n(x_0^*) = y_n^*.$$

Analogno kao kod običnih diferencijalnih jednačina, partikularno rešenje sistema S je svako rešenje koje se iz opšteg rešenja dobija za neke konkretne vrednosti konstanti $C_1, \ldots, C_n$.

0.2 Metoda eliminacije

Radi jednostavnosti, posmatraćemo sistem S u slučaju 2 jednačine:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \tag{2}$$

Diferenciranjem prve jednačine po x, dobijamo

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx},$$

tj.

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2'.$$

Zamenjujući y_1' i y_2' funkcijama $f_1(x, y_1, y_2)$, $f_2(x, y_1, y_2)$ i označavajući desnu stranu sa $g_1(x, y_1, y_2)$, dobijamo jednakost

$$y_1'' = g_1(x, y_1, y_2). \tag{3}$$

Iz prve jednačine sistema (2), rešavanjem po y_2, dobijamo da se y_2 moze izraziti kao funkcija promenljive (x, y_1, y_1'):

$$y_2 = g_2(x, y_1, y_1'). \tag{4}$$

Konačno, kada tako dobijeno y_2 uvrstimo u jednačinu (3), dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$y_1'' = f(x, y_1, y_1'). \tag{5}$$

Prethodna jednačina je ekvivalentna sistemu (2). Tačnije, ako je y_1 rešenje diferencijalne jednačine (5) onda je (y_1, y_2) rešenje pomenutog sistema, pri čemu se funkcija y_2 dobija po formuli (4).

Na kraju, napomenimo da je prethodni postupak u nekom smislu opisni postupak koji podrazumeva da se sve navedene radnje (eliminacije, izražavanje jednih funkcija preko drugih...) mogu obaviti u konkretnom zadatku. Ilustrovaćemo navedeni postupak na jednom primeru.

Primer 0.1 *Rešiti sistem diferencijalnih jednačina*

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases} \tag{6}$$

Napomenimo da su u prethodnom sistemu x, y i z nepoznate funkcije i da je t nezavisno promenljiva, tj. njihov argument. Diferenciranjem prve jednačine po t dobijamo

$$x'' = -2x' - 2y' - 4z'.$$

Koristeći da je

$$y' = -2x + y - 2z$$

i

$$z' = 5x + 2y + 7z,$$

dobijamo

$$x'' = -2x' - 2(-2x + y - 2z) - 4(5x + 2y + 7z)$$

odnosno

$$x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z.$$

Diferenciranjem prethodne jednakosti po promenljivoj t, i korišćenjem izraza kojim su dati y' i z', dobijamo da je

$$x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z.$$

Posmatraćemo novi sistem:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z, \\ x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z. \end{cases} \tag{7}$$

U prethodnom sistemu ćemo eliminisati promenljive y i z. Iz prve dve jednačine sistema imamo da je

$$\begin{cases} 2y = x'' - 4x' + 4x, \\ 4z = -x'' + 3x' - 6x. \end{cases} \tag{8}$$

Ubacivanjem prethodnih jednakosti u treću jednačinu sistema, dobijamo

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0,$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Njeno rešenje je

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

Koristeći izraze za $x(t)$, $x'(t)$ i $x''(t)$, dobijamo izraz koji odgovara y'. Integracijom, dobijamo da je

$$y(t) = \frac{1}{2}C_1e^t + \frac{1}{2}C_3e^{3t}.$$

Slično, dobijamo da je

$$z(t) = -C_1e^t - C_2e^t - \frac{3}{2}C_3e^{3t}.$$

0.3 Metoda integrabilnih kombinacija

U pojedinim slučajevima, kombinovanjem jednačina u sistemu S, može se relativno lako doći do jedne diferencijalne jednačine prvog reda u kojoj će se pojaviti nova nepoznata funkcija u, koja zavisi od funkcija $y_1, \ldots, y_n$. Neka je to jednačina oblika

$$F(x, u, u') = 0$$

i neka je njen opšti integral

$$\Phi(x, u, C) = 0.$$

Pošto smo napomenuli da je $u = u(y_1, \ldots, y_n)$, kada to uvrstimo u prethodnu jednakost, dobijamo novu jednakost koju možemo zapisati sa

$$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0. \tag{9}$$

Pretpostavimo da smo prethodni postupak svođenja sistema na jednu diferencijalnu jednačinu reda n sproveli n puta i dobili n *nezavisnih* veza između x, $y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{array}{c} \Psi_1(x, y_1, \ldots, y_n, C_1) = 0, \\ \Psi_2(x, y_1, \ldots, y_n, C_2) = 0, \\ \cdots \\ \Psi_n(x, y_1, \ldots, y_n, C_n) = 0. \end{array} \tag{10}$$

Važno je napomenuti da nezavisnost u ovom slučaju znači da se ni jedna od funkcija Ψ_i ne može predstaviti kao funkcija ostalih.

Prema tome, ako je uređena $n-$torka $(y_1, \ldots, y_n)$ rešenje sistema S, onda je, za određene vrednosti konstanti $C_1, \ldots, C_n$, ta ista $n-$torka rešenje sistema (10). Pretpostavimo da se sistem (10) može rešiti po funkcijama $y_1, \ldots, y_n$, tako da dobijamo

$$\begin{array}{c} y_1 = \Phi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 = \Phi_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \vdots \\ y_n = \Phi_n(x, C_1, \ldots, C_n). \end{array}$$

Na taj način smo u stvari dobili opšte rešenje sistema S.

Posmatraćemo ponovo diferencijalnu jednačinu (9). Ukoliko se ona može rešiti po konstanti C, tj. ako postoji funkcija Ψ takva da je

$$\Psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C, \tag{11}$$

onda se takva funkcija naziva *prvim integralom* sistema S.

Prema tome, ukoliko znamo n nezavisnih prvih integrala sistema S

$$\begin{gathered} \Psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \Psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \vdots \\ \Psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n, \end{gathered}$$

mi praktično znamo i njegovo opšte rešenje. Prirodno se nameće pitanje *egzistencije* takvih prvih integrala. Odgovor na to pitanje daje sledeće tvrđenje:

Teorema 0.2 *Prvi integrali*

$$\begin{gathered} \Psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \Psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \vdots \\ \Psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n, \end{gathered}$$

sistema S su nezavisni ako i samo ako je

$$\frac{D(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \Psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Determinanta iz prethodne teoreme se zove *Jakobijan sistema funkcija* $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$.

Integrabilne kombinacije se obično dobijaju zapisivanjem sistema S u tzv. *simetričnom obliku*:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \tag{12}$$

Primer 0.2 *Rešiti sistem diferencijalnih jednačina*

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - x, \\ z' = x - y. \end{cases}$$

Sabirajući sve tri jednačine sistema dobijamo da je

$$x' + y' + z' = 0,$$

tj.

$$d(x + y + z) = 0.$$

Odavde sledi da je

$$x + y + z = C_1.$$

Sada ćemo prvu jednačinu da pomnožimo sa x, drugu sa y i treću sa z, a zatim ćemo da ih saberemo. Dobijamo

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0,$$

tj.

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Prethodne dve relacije daju vezu između promenljivih x, y i z. One se u opštem slučaju koriste da se iz polaznog sistema dobije jedna diferencijalna jednačina po jednoj nepoznatoj funkciji. Mi ćemo u našem primeru koristiti samo prvu relaciju. Iz nje je

$$z = C_1 - x - y.$$

Stavićemo desnu stranu prethodne jednakosti u prve dve jednačine sistema umesto z. Dobijamo

$$x' = 2y + x - C_1$$

i

$$y' = -2x - y + C_1.$$

Diferencirajući prvu jednačinu po promenljivoj t, a zatim stavljajući u takvu jednačinu umesto y' izraz $-2x - y + C_1$, dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$x'' = -4x - 2y + 2C_1 + x',$$

tj. dobijamo novi sistem

$$\begin{cases} x' = x + 2y - C_1, \\ x'' = x' - 4x - 2y + 2C_1. \end{cases}$$

Iz prve jednačine ovog sistema je

$$2y = x' - x + C_1.$$

Stavljajući u drugu jednačinu izraz za $2y$*, dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda*

$$x'' + 3x = C_1.$$

Njeno opšte rešenje je

$$x = C_2 \cos\sqrt{3}t + C_3 \sin\sqrt{3}t + \frac{1}{3}C_1.$$

Iz jednačine

$$x' = 2y + x - C_1$$

dobijamo

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_3 - C_2\right)\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_2 + C_3\right)\sin\sqrt{3}t + \frac{1}{3}C_1.$$

Na kraju, iz

$$z = C_1 - x - y,$$

dobijamo

$$z = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_3 + C_2\right)\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_2 - C_3\right)\sin\sqrt{3}t + \frac{1}{3}C_1.$$