Diferencijalna jednačina oblika

$$a_0x^ny^{(n)}(x) + a_1x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_ny = f(x), \tag{1}$$

gde su $a_0, \ldots, a_n$ konstante i gde je $f(x)$ neprekidna funkcija, zove se *Ojlerova diferencijalna jednačina n-tog reda.*

Napomenimo da ćemo u slučaju kada je $f(x) \equiv 0$ govoriti o *homogenoj Ojlerovoj diferencijalnoj jednačini*, u suprotnom, o nehomogenoj. Takođe, smatraćemo da je $n \geq 2$.

Može se govoriti i o opštijoj varijanti Ojlerove diferencijalne jednačine, tj. o jednačini gde je promenljiva x zamenjena polinomom $ax + b$:

$$a_0(ax + b)^ny^{(n)}(x) + a_1(ax + b)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_ny = f(x).$$

Pokazaćemo u slučaju kada je $n = 2$ kako se Ojlerova diferencijalna jednačina svodi na diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Dakle, posmatraćemo jednačinu

$$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x).$$

Uvedimo smenu $x = e^t$. Tada je $t = \ln x$, pa imamo da važi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Odatle je

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

Zamenom u posmatranu jednačinu dobijamo

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = f(x).$$

Odatle dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima po promenljivoj t:

$$A_0y'' + A_1y' + A_2y = f(x(t)),$$

gde je

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1 - a_0, \quad A_2 = a_2.$$

U slučaju homogene Ojlerove diferencijalne jednačine možemo uvesti smenu $y = x^\lambda$. Tada imamo da je

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2},$$

pa zamenom u jednačinu, dobijamo

$$a_0 x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + a_1 x \lambda x^{\lambda-1} + a_2 x^\lambda = 0.$$

Izvlačenjem x^λ ispred zagrade, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$a_0\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Rešenjima ove karakteristične jednačine po λ odgovaraće partikularni integrali odgovarajuće Ojlerove diferencijalne jednačine. Važno je napomenuti da je prethodna karakteristična jednačina ekvivalentna sa jednačinom koju bismo dobili da smo koristili smenu $x = e^t$. Na taj način, rešenje dobijamo tako što ga napisemo u skladu sa teorijom vezanom za linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima u odnosu na promenljivu t, a zatim smenu vratimo koristeći da je $t = \ln x$. Prethodno razmatranje ćemo kasnije ilustrovati primerima.

U slučaju jednačine kod koje se umesto x pojavljuje polinom $ax+b$, smene su

$$ax + b = e^t,$$

odnosno

$$y = (ax+b)^\lambda,$$

pa analogno kao u prethodnim slučajevima dolazimo do rešenja.

Primer 0.1 *Rešiti Ojlerovu diferencijalnu jednačinu*

$$x^3y''' + x^2y'' + 3xy' - 8y = 0.$$

Uvedimo smenu $y = x^\lambda$. Dobijamo da je

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2))x^{\lambda-3}.$$

Ubacivanjem u jednačinu, posle skraćivanja i sređivanja, dobijamo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0.$$

Rešenja ove jednačine su

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i.$$

U skladu sa napomenom vezanom za ekvivalentnost karakterističnih jednačina, opšte rešenje je dakle oblika

$$y(x) = C_1 e^{2t} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t,$$

odnosno

$$y = C_1 x^2 + C_2 \cos 2 \ln x + C_3 \sin 2 \ln x.$$

Primer 0.2 *Rešiti Ojlerovu diferencijalnu jednačinu*

$$x^2 y'' + xy' + y = \sin(2 \ln x).$$

Uvedimo smenu $x = e^t$. *Imamo da je*

$$y' = y'_t e^{-t}, \quad y'' = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}.$$

Napomenimo da smo koristili oznake da je

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y''_{t^2}$$

i

$$\frac{dy}{dt} = y'_t.$$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo

$$e^{2t} e^{-2t} (y''_{t^2} - y'_t) + e^t e^{-t} y'_t + y_t = \sin 2t,$$

gde y_t *praktično označava da je* $y = y(t)$. *Odatle je*

$$y''_{t^2} + y_t = \sin 2t,$$

tj. Ojlerova jednačina je postala nehomogena linearna difrencijalna jednačina drugog reda. Kao i ranije, prvo rešavamo odgovarajuću homogenu jednačinu. Njena karakteristična jednačina je

$$r^2 + 1 = 0,$$

čija su rešenja $r_{1,2} = \pm i$, *pa je njeno opšte rešenje*

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y_p = A \sin 2t + B \cos 2t.$$

Metodom neodređenih koeficijenata, dolazimo do partikularnog rešenja

$$y_p = -\frac{1}{3} \sin 2t.$$

Dakle, opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{3} \sin 2t,$$

tj.

$$y = C_1 \cos 2 \ln x + C_2 \sin 2 \ln x - \frac{1}{3} \sin 2 \ln x.$$