Sa formalno-matematičke tačke gledišta problem rešavanja diferencijalnih jednačina je obrnut problemu *diferenciranja*, tj. nalaženju izvoda od neke date funkcije. Najjednostavniji takav problem susrećemo u integralnom računu. Ako traženu primitivnu funkciju funkcije $f(x)$ označimo sa $y(x)$, onda se pomenuti problem može zapisati u obliku jednačine

$$y'(x) = f(x),$$

odnosno

$$dy = f(x)\,dx,$$

a to je problem koji znamo da rešimo. Poznato je da se funkcija koja zadovoljava prethodne jednačine može zapisati u obliku

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C.$$

Napomenimo da simbol neodređenog integrala označava proizvoljnu primitivnu funkciju, dok je C proizvoljna konstanta. Dakle, naša jednačina ima beskonačno mnogo rešenja koja se dobijaju za neke konkretne vrednosti konstante C, pa zaključujemo da rešenje posmatrane jednačine *nije jedinstveno.*

Označavajući nezavisno promenljivu sa x i odgovarajuću funkciju sa y daćemo i formalnu definiciju diferencijalnih jednačina.

Definicija 0.1 *Diferencijalna jednačina je relacija oblika*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

gde je F data funkcija od $n+2$ promenljive i gde su y', $y'', \ldots, y^{(n)}$ izvodi funkcije $y = y(x)$.

Red diferencijalne jednačine predstavlja najveći red izvoda koji se u njoj pojavljuje. Tako je na primer sa

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0$$

definisana opšta diferencijalna jednačina trećeg reda.

Navedimo primere diferencijalnih jednačina prvog, drugog i trećeg reda:

$$y' + \sin x = y,$$

$$y'' + (y')^3 = 0,$$

$$y''' - y'' - y' - y - x = 0.$$

Sada ćemo formulisati pojam *rešenja* diferencijalne jednačine.

Definicija 0.2 *Rešenje diferencijalne jednačine (1) je funkcija $y(x)$ koja na nekom intervalu (a, b) ima izvode do reda n i takva da zadovoljava datu jednačinu za svako $x \in (a, b)$.*

Postupak rešavanja diferencijalne jednačine se naziva *integracijom* date jednačine a grafik odgovarajućeg rešenja naziva se *integralnom krivom* date jednačine.

Primer 0.1 *Pokazati da je funkcija*

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x}$$

rešenje diferencijalne jednačine

$$xy' + y = x^2$$

na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

Pošto je

$$y' = \frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2},$$

zamenom u posmatranu diferencijalnu jednačinu, dobijamo

$$xy' + y = x\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} = x^2.$$

Jasno je da prethodna relacija važi za sve $x \neq 0$, pa dato $y(x)$ predstavlja rešenje posmatrane diferencijalne jednačine na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Napomenimo da data funkcija nije rešenje posmatrane diferencijalne jednačine ukoliko se posmatra na nekom otvorenom intervalu koji sadrži nulu.

Posmatraćemo diferencijalne jednačine prvog reda, tj. jednačine oblika

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Ako se prethodna jednačina može rešiti po y' onda dobijamo takozvani *eksplicitni oblik* diferencijalne jednačine (2):

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Iz prethodnih primera možemo zaključiti da diferencijalna jednačina prvog reda može imati beskonačno mnogo rešenja. Da bismo izdvojili neko posebno, *partikularno rešenje*, potrebno je da zadamo neki dodatni uslov. Na primer to može biti *početna vrednost* tražene funkcije. U tom slučaju se radi o takozvanom Košijevom problemu:

Definicija 0.3 *Košijev problem za diferencijalnu jednačinu prvog reda (3) se sastoji u nalaženju onog rešenja diferencijalne jednačine (3) za koje je* $y(x_0) = y_0$*, gde su* x_0 *i* y_0 *dati brojevi.*

Uslov $y(x_0) = y_0$ se obično naziva *Košijev uslov* ili *početni uslov.*
Posmatraćemo sledeći primer.

Primer 0.2 *Naći ono rešenje diferencijalne jednačine*

$$y' = x^3$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 2$.

Kao što smo već napomenuli, prethodna diferencijalna jednačina se rešava integracijom odakle dobijamo da je funkcija

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

njeno rešenje. Da bismo dobili traženo rešenje u prethodnu relaciju ubacujemo $x = 1$ *i* $y = 2$*. Lako se dobija da je u tom slučaju* $C = \frac{7}{4}$ *pa je traženo rešenje*

$$y = \frac{x^4 + 7}{4}.$$

Prirodno se nameće pitanje *egzistencije rešenja* Košijevog problema. Takođe, postavlja se i pitanje *jedinstvenosti rešenja*, ako ono postoji. Odgovor na oba pitanja daje Košijeva teorema koja predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata u teoriji diferencijalnih jednačina.

Teorema 0.1 *Košijev problem za diferencijalnu jednačinu prvog reda (3) ima jedinstveno rešenje u svakoj tački* $M_0(x_0, y_0)$ *pravougaonika*

$$D = \{(x, y),\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\},$$

ako je funkcija $f(x, y)$ *neprekidna na* D *zajedno sa svojim parcijalnim izvodom* $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.