Kao što smo već napomenuli, ako su za diferencijalnu jednačinu

$$y' = f(x, y)$$

zadovoljeni uslovi Košijeve teoreme na nekoj oblasti D, onda kroz svaku tačku $M_0(x_0, y_0) \in D$ prolazi jedinstvena integralna kriva. Za takve tačke se obično kaže da su *regularne tačke.* Tačke koji nisu regularne zvaćemo *singularnim tačkama.* Kroz takve tačke u opštem slučaju ne prolazi ni jedna integralna kriva ili prolaze bar dve. Dakle, ako su narušeni uslovi Košijeve teoreme u tački $M_0(x_0, y_0) \in D$, onda je takva tačka singularna. Na primer, za diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{y}{x}$$

tačka $O(0, 0)$ će biti singularna tačka pošto kroz nju prolazi *beskonačno mnogo* integralnih krivih $y = Cx$. Zaista, imamo da je

$$y' = C = \frac{Cx}{x} = C.$$

Nasuprot tome, za diferencijalnu jednačinu

$$y' = -\frac{x}{y}$$

kroz singularnu tačku $O(0, 0)$ ne prolazi ni jedna integralna kriva

$$y^2 + x^2 = C,\ C > 0.$$

Singularno rešenje diferencijalne jednačine prvog reda je ono rešenje te diferencijalne jednačine koje u svim svojim tačkama narušava svojstvo jedinstvenosti, tj. u okolini svake tačke $M(x, y)$ singularnog rešenja postoje bar dve integralne krive koje prolaze kroz tu tačku.

0.1 Diferencijalne jednačine nerešene po y'

Neka u jednačini (**??**) nedostaje jedna od promenljivih, tj. neka je ona oblika

$$f(x, y') = 0$$

ili

$$f(y, y') = 0.$$

Tada je potrebno jednačinu rešiti po x odnosno y.

a) Neka je jednačina oblika

$$f(x, y') = 0.$$

Stavljajući da je $y' = p$, dobijamo da je

$$x = \varphi(p), \quad dx = \varphi'(p)dp.$$

Dalje je

$$dy = pdx, \quad y = \int pdx = \int p\varphi'(p)dp + C.$$

Prema tome, imamo da je opšte rešenje posmatrane diferencijalne jednačine dato u parametarskom obliku

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)dp + C.$$

Primer 0.1 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$(y')^2 + 1 - x = 0.$$

Imamo da je

$$x = (y')^2 + 1 = p^2 + 1,$$

gde je x funkcija parametra p. Kako je

$$dy = pdx,$$

to je

$$y = \int pdx = 2\int p^2 dp = \frac{2}{3}p^3 + C.$$

Iz prethodne dve relacije dobijamo opšti integral polazne jednačine

$$(x-1)^3 = \left[\frac{3}{2}(y - C)\right]^2.$$

b) Ako je jednačina oblika $y = \varphi(p)$ onda je

$$dy = \varphi'(p)dp, \quad dy = pdx,$$

pa je

$$pdx = \varphi'(p)dp, \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp + C.$$

Prema tome dobijamo opšt rešenje predstavljeno u *parametarskom* obliku dato sa

$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp + C.$$

Primer 0.2 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$y = y'^2 e^{y'}.$$

Na osnovu prethodnog imamo da je njeno opšte rešenje

$$y = p^2 e^p, \quad x = (p+1)e^p + C.$$

0.2 Lagranžova i Kleroova jednačina

Među tipovima diferencijalnih jednačina koje nisu date u eksplicitnom obliku, tj. jednačinama koje nisu rešene po prvom izvodu, posebno se izdvajaju Lagranžova i Kleroova diferencijalna jednačina. Kod njih se rešenje traži uvođenjem parametra koji predstavlja izvod tražene funkcije.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

gde su $\varphi(\cdot)$ i $\psi(\cdot)$ funkcije koje su neprekidne zajedno sa svojim prvim izvodima i gde je

$$\varphi(y') \neq y',$$

je *Lagranžova diferencijalna jednačina.*

Uvođenjem parametra $p = y'$, $(p(x) = y'(x))$, ona se može napisati u obliku

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{2}$$

Diferencirajmo obe strane u jednačini (2). Imamo da je

$$dy = \varphi(p)\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp.$$

Pošto je

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

sledi da je

$$dy = p\,dx,$$

pa je polazna jednačina ekvivalentna jednačini

$$p\,dx = \varphi(p)\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp,$$

tj.

$$(\varphi(p) - p)\, dx + x\varphi'(p)\, dp + \psi'(p)\, dp = 0.$$

Deljenjem obe strane sa

$$(\varphi(p) - p)\, dp,$$

dobijamo

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0. \tag{3}$$

Napomenimo da smo pretpostavili da je $\varphi(y') \neq y'$, pa je izraz sa kojim delimo različit od nule. Jednačina (3) je linearna diferencijalna jednačina po funkciji $x(p)$ pa je možemo integraliti. Dobićemo rešenje oblika $x = x(p, C)$. Ubacujući $x(p, C)$ u (2) dobijamo rešenje Lagranžove jednačine u takozvanom *parametraskom obliku*:

$$x = x(p, C); \quad y = x(p, C)\varphi(p) + \psi(p).$$

Ako je p_0 rešenje jednačine $\varphi(p) = p$ onda imamo singularno rešenje Lagranžove jednačine u obliku

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Specijalan slučaj Lagranžove diferencijalne jednačine predstavlja *Kleroova diferencijalna jednačina*:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{4}$$

Primenićemo istu proceduru kao pri rešavanju Lagranžove diferencijalne jednačine. Dakle, imamo da je

$$dy = p\, dx + x\, dp + \psi'(p)\, dp,$$

gde je $y' = p$. Pošto je $dy = p\, dx$, sledi da je

$$(x + \psi'(p))\, dp = 0.$$

Prema tome, ili je $p = C$ ili je $x = -\psi'(p)$. U prvom slučaju, zbog (4), dobijamo opšte rešenje Kleroove jednačine

$$y(x) = Cx + \psi(C).$$

U drugom slučaju imamo *singularno rešenje* Kleroove jednačine dato u parametarskom obliku:

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

Eliminacijom parametra p dobijamo opšte rešenje ili opšti integral polazne jednačine.

Primer 0.3 *Naći opšte rešenje Kleroove diferencijalne jednačine*

$$y = y'x + y' - (y')^2.$$

Opšte rešenje Kleroove diferencijalne jednačine sledi direktno, zamenom y' sa C, tj.

$$y = Cx + C - C^2.$$

Primetimo da je prethodnom formulom definisana familija pravih u ravni. Kako je

$$\psi(p) = p - p^2,$$

odnosno

$$\psi'(p) = 1 - 2p,$$

to se singularno rešenje dobija eliminacijom parametra p iz jednačina

$$y = px + p - p^2$$

i

$$x + 1 - 2p = 0.$$

Iz druge jednačine je

$$p = \frac{x+1}{2},$$

pa je singularno rešenje

$$y = x\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

Primer 0.4 *Naći opšte rešenje Lagranžove diferencijalne jednačine*

$$y = 2xy' - (y')^2.$$

Uvođenjem parametra $p = y'$, dobijamo da je

$$y = 2xp - p^2.$$

Diferenciranjem, dobijamo

$$dy = pdx = 2xdp + 2pdx - 2pdp,$$

odakle se dobija linearna diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x - 2 = 0.$$

Njeno rešenje je

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p,$$

tako da je

$$y = 2p\left(\frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p\right) - p^2 = \frac{2C}{p} + \frac{1}{3}p^2.$$

Kako je

$$\varphi(p) = 2p,$$

to jednačina

$$\varphi(p) = p$$

ima rešenje $p_0 = 0$. *Sledi da je singularno rešenje polazne jednačine*

$$y = p_0x + f(p_0) = 0 \cdot x - 0^2 = 0.$$