Rikatijeva diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) = 0, \tag{1}$$

gde su $P(x), Q(x)$ i $R(x)$ date funkcije, koje su neprekidne na nekom intervalu (a, b), zove se *Rikatijeva diferencijalna jednačina.*

Ova jednačina se rešava svođenjem na linearnu jednačinu kada je poznato bilo koje njeno partikularno rešenje y_1. Naime, tada se Rikatijeva jednačina smenom

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu po novoj funkciji $u(x)$. Zaista, imamo da je

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2},$$

pa posle uvršćivanja u (1) i sređivanja, dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu

$$u' - \left[2Q(x)y_1 + P(x)\right] u = Q(x).$$

Napomenimo da se može koristiti i druga smena

$$y = y_1 + u,$$

ali se tada Rikatijeva diferencijalna jednačina svodi na Bernulijevu oblika

$$u' + Q(x)u^2 + \left[2Q(x)y_1 + P(x)\right] u = 0.$$

Primer 0.1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1,$$

ako je poznato njeno partikularno rešenje

$$y_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

Uvedimo smenu

$$y = \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{x}.$$

Diferenciranjem, dobijamo da je

$$y' = -\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Ubacujući izraze za y i y' u polaznu jednačinu dobijamo

$$-\frac{x^2}{u^2}u' = \frac{x^2}{u^2} - \frac{x}{u},$$

odnosno

$$u' - \frac{1}{x}u = -1.$$

Opšte rešenje prethodne jednačine je

$$u = x(C - \ln|x|), \quad C \in R,$$

pa je opšte rešenje polazne jednačine

$$y = \frac{1}{u} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(C - \ln|x|)} - \frac{1}{x}.$$

Primer 0.2 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2,$$

ako je poznato njeno partikularno rešenje

$$y_1(x) = x.$$

Uvođenjem smene

$$y(x) = x + u(x)$$

dobijamo da je

$$y' = 1 + u',$$

pa polazna jednačina postaje Bernulijeva diferencijalna jednačina

$$x + xu' - 2x^2 - 2xu - x - u + x^2 + 2xu + u^2 = -x^2,$$

odnosno posle sređivanja

$$u' - \frac{1}{x}u = -u^2.$$

Smenom

$$z = u^{1-2} = u^{-1},$$

dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z' + \frac{1}{x}z = 1.$$

Njeno opšte rešenje je

$$z = C\frac{1}{x} + \frac{x}{2}, \quad C \in R.$$

Kako je

$$u = \frac{1}{z}$$

i

$$y = x + u,$$

imamo da je

$$y = x + \frac{1}{C\frac{1}{x} + \frac{x}{2}}, \quad C \in R,$$

opšte rešenje polazne Rikatijeve diferencijalne jednačine.