Bernulijeva diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1, \tag{1}$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ date funkcije koje su neprekidne na nekom intervalu (a, b), zove se *Bernulijeva diferencijalna jednačina*. Pokazaćemo da se, odgovarajućom smenom, prethodna jednačina svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu. Najpre treba napomenuti da za $\alpha = 0$, Bernulijeva jednačina postaje linearna, dok se za $\alpha = 1$ svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

Uvedimo smenu $u = y^{1-\alpha}$. Odatle je, prema teoremi za izvod složene funkcije,

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'.$$

Prema tome, ako jednačinu (1) pomnožimo sa

$$(1-\alpha)y^{-\alpha},$$

a zatim uvrstimo smenu $u = y^{1-\alpha}$ dobijamo

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)y^{1-\alpha}P(x) = (1-\alpha)Q(x),$$

tj. dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu

$$u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x).$$

Rešavajući prethodnu jednačinu, a zatim vraćanjem smene, dobijamo rešenje polazne Bernulijeve diferencijalne jednačine.

Primer 0.1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Lako se vidi da je ovo Bernulijeva diferencijalna jednačina za koju je $\alpha = \frac{1}{2}$. *Uvedimo smenu* $u = y^{\frac{1}{2}}$. *Odatle je*

$$u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'.$$

Množenjem prve jednačine sa

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}},$$

i sređivanjem, dobijamo linearnu jednačinu

$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{x}{2}.$$

Rešavanjem, a zatim vraćanjem smene, dobijamo opšte rešenje polazne jednačine

$$y = \frac{1}{4}x^4 \ln^2 |xC|.$$