

Diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim  
 Jednačina oblika

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (1)$$

je *diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim* ili *diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive*. Množenjem obe strane prethodne jednačine sa  $dx$  i deljenjem sa  $f_2(y)$ , uz uslov da je  $f_2(y) \neq 0$  na nekom intervalu, dobijamo

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx.$$

Integracijom, dobijamo da je

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

Prema tome, ako su zadovoljeni uslovi Košijeve teoreme na nekoj oblasti  $G$ , onda je prethodnom relacijom definisano opšte rešenje (opšti integral) diferencijalne jednačine (1) na toj oblasti.

Ako za neko  $y = y_0$  važi da je  $f_2(y_0) = 0$ , onda je očigledno  $y = y_0$  takođe rešenje razmatrane jednačine.

Diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim može biti zadana i nešto drugačije, tj. u takozvanoj razvijenoj formi:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0.$$

Deljenjem obe strane prethodne jednačine sa  $Q_1(y) \cdot P_2(x)$  dobijamo

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0,$$

odakle sledi da je

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C.$$

Primitimo da mogu postojati rešenja polazne diferencijalne jednačine koja zadovoljavaju uslov  $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ . Ako ta rešenja nisu sadržana u opštem integralu, onda ona predstavljaju singularna rešenja polazne jednačine.

Jednačina

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in R,$$

se smenom

$$u = ax + by + c$$

svodi na diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promenljivim. Zaista, u tom slučaju imamo da je

$$u' = a + by',$$

tj.

$$y' = \frac{u' - a}{b}, \quad b \neq 0,$$

(slučaj  $b = 0$  je trivijalan, tj. tada se do rešenja dolazi neposrednom integracijom), odakle dobijamo diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promenljivim

$$u' = a + bf(u).$$

**Primer 0.1** *Naći rešenje diferencijalne jednačine*

$$(1 + x^2) dy + y dx = 0,$$

koje zadovoljava uslov  $y(1) = 1$ .

*Lako se dobija da je prethodna jednačina ekvivalentna jednačini*

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0, \quad y \neq 0.$$

*Odatle dobijamo da je*

$$\ln |y| + \operatorname{arctg} x = C.$$

*Stavljajući da je  $y = 1$  i  $x = 1$ , dobijamo da je  $C = \frac{\pi}{4}$ . Prema tome, traženo partikularno rešenje, tj. partikularni integral ima oblik*

$$\ln |y| + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

*Napomenimo da bi funkcija  $y(x) \equiv 0$  mogla biti rešenje polazne jednačine, ali zbog početnog uslova  $y(1) = 1$  je ne razmatramo kao kandidata za partikularno rešenje.*

Homogena diferencijalna jednačina

Za funkciju  $f(x, y)$  kažemo da je *homogena* ako za svako  $\lambda > 0$  važi

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Diferencijalna jednačina

$$y' = f(x, y)$$

je *homogena diferencijalna jednačina* ako je funkcija  $f(x, y)$  homogena. Jasno je da uzimajući da je  $\lambda = \frac{1}{x}$  imamo da je

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

pa možemo reći da je diferencijalna jednačina homogena ako je oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2)$$

Uvedimo smenu

$$\frac{y}{x} = u.$$

Tada imamo da je

$$y = x \cdot u$$

pa, na osnovu pravila za izvod proizvoda, imamo da važi

$$y' = u + x \cdot u'.$$

Na taj način iz (2) dobijamo diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promenljivim

$$u + x \cdot u' = f(u),$$

odnosno

$$x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Ako je

$$f(u) - u \neq 0,$$

onda je prethodna jednakost ekvivalentna sa

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Odatle dobijamo da je rešenje homogene jednačine dato sa

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln |x| + C.$$

4

Ako za neko  $u_0$  važi da je

$$f(u_0) - u_0 = 0,$$

onda je i

$$u = u_0$$

tj.

$$y = x \cdot u_0$$

takođe rešenje posmatrane jednačine.

**Primer 0.2** *Naći rešenje diferencijalne jednačine*

$$y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}$$

koje zadovoljava uslov  $y(-1) = 1$ .

*Deljenjem izraza u brojiocu i imeniocu razlomka sa  $x^3$ , dobijamo jednačinu*

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}.$$

*Uvođenjem smene*

$$\frac{y}{x} = u$$

*dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive*

$$u + x \cdot u' = u^2 - u,$$

tj.

$$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{dx}{x}.$$

*Integracijom i vraćanjem smene dobijamo*

$$\frac{y - 2x}{y} = Cx^2,$$

*dok se partikularno rešenje dobija za  $C = 3$ .*

Linearna diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{3}$$

gde su  $P(x)$  i  $Q(x)$  date funkcije koje su neprekidne na nekom intervalu  $(a, b)$ , je *linearna diferencijalna jednačina*. Postoji više načina za njihovo rešavanje, a mi ćemo ovde prikazati Bernulijev metod.

Potražimo rešenje posmatrane jednačine u obliku proizvoda dve funkcije, tj. neka je

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

U tom slučaju jednačina (3) postaje

$$u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} = Q(x) - P(x)u(x)v(x),$$

odnosno

$$u(x) \left( \frac{dv}{dx} + P(x)v(x) \right) + v(x) \frac{du}{dx} = Q(x).$$

Izaberimo za funkciju  $v(x)$  jedno od rešenja diferencijalne jednačine

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v(x) = 0.$$

To je jednačina koja razdvaja promenljive pa prema tome dobijamo da je

$$\frac{dv}{v(x)} = -P(x) dx.$$

Odatle je

$$\int \frac{dv}{v(x)} = - \int P(x) dx.$$

Zaključujemo da je da

$$\ln |v(x)| + \ln C = - \int P(x) dx,$$

odnosno

$$Cv(x) = e^{- \int P(x) dx}.$$

Uzimajući da je  $C = 1$ , dobijamo jedno od rešenja

$$v(x) = e^{- \int P(x) dx}.$$

Dalje, imamo da  $u(x)$  mora biti rešenje jednačine

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x),$$

6

tj.

$$du = \frac{Q(x) dx}{v(x)}.$$

Integracijom, konačno dobijamo da je

$$\int du = \int \frac{Q(x) dx}{v(x)},$$

tj.

$$u(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

Na taj način smo dobili formulu za rešenje linearne diferencijalne jednačine (3):

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[ C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right]. \quad (4)$$

Napomenimo da u slučaju kada je  $Q(x) \equiv 0$  na  $(a, b)$ , polazna jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive i njeno rešenje je tada dato sa

$$y = C e^{-\int P(x) dx}.$$

Ilustrirajmo na jednom primeru Bernulijev postupak za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina.

**Primer 0.3** *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}.$$

*Neka je  $y = uv$  gde je  $u = u(x)$  i  $v = v(x)$ . Tada je*

$$y' = u'v + uv',$$

*pa polazna diferencijalna jednačina postaje*

$$u'v + uv' + \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x}.$$

*Odatle je*

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Izaberimo funkciju  $v(x)$  tako da izraz u zagradi bude jednak nuli, tj. rešimo diferencijalnu jednačinu

$$v' + v \operatorname{tg} x = 0.$$

Razdvajanjem promenljivih dobijamo

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx.$$

Integracijom i uzimanjem za konstantu  $\ln|C|$  umesto  $C$ , dobijamo

$$\ln |v| = \ln |\cos x| + \ln |C|,$$

tj.

$$v(x) = C \cos x.$$

Pošto nam je dovoljno samo jedno rešenje stavimo da je  $C = 1$  i dobijamo da je  $v(x) = \cos x$ . Sada nam preostaje da rešimo diferencijalnu jednačinu

$$u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Imamo da je

$$du = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

pa je

$$u(x) = \operatorname{tg} x + C.$$

Prema tome, opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = (\operatorname{tg} x + C) \cos x,$$

ili

$$y(x) = C \cos x + \sin x.$$

**Primer 0.4** Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' + y \cos x = e^{-\sin x}.$$

U ovom primeru je

$$P(x) = \cos x, \quad Q(x) = e^{-\sin x},$$

pa se primenom formule (4) dobija opšte rešenje

$$y = e^{-\int \cos x dx} \left[ C + \int e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx \right],$$

tj.

$$y = e^{-\sin x} [C + \int dx],$$

odnosno

$$y = e^{-\sin x} [C + x].$$

**Primer 0.5** Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{y}{x + y^2}.$$

Primetimo da prethodna jednačina nije linearna po  $y$  i  $y'$  ali jeste po  $x$  i  $x'$ . Uzimajući u obzir da je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

imamo da je

$$x' = \frac{x + y^2}{y},$$

tj.

$$x' - \frac{1}{y}x = y.$$

Rešavajući je korišćenjem formule (4), lako dobijamo opšte rešenje

$$x = y^2 + Cy.$$