

ВЕЗА КРИВОЛИНИЈСКОГ ИНТЕГРАЛА ПРВЕ И ДРУГЕ ВРСТЕ

ТЕОРЕМА:

$$\int_{AB} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{AB} (P(x,y) \cos \alpha + Q(x,y) \sin \alpha) dl$$

... $\alpha = \alpha(M)$ угао који ^{AB} тачка на кривој у тачки M закључа са позитивним делом x-осе.

НЕЗАВИСНОСТ КРИВ. ИНТ. II ВРСТЕ ОД ПУТА ИНТЕГРАЦИЈЕ

.. $P(x,y), Q(x,y)$.. непр. на G , $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непр. унутар G :

1° Интеграл по пр. затвореној кривој ϵ , једнак је 0.

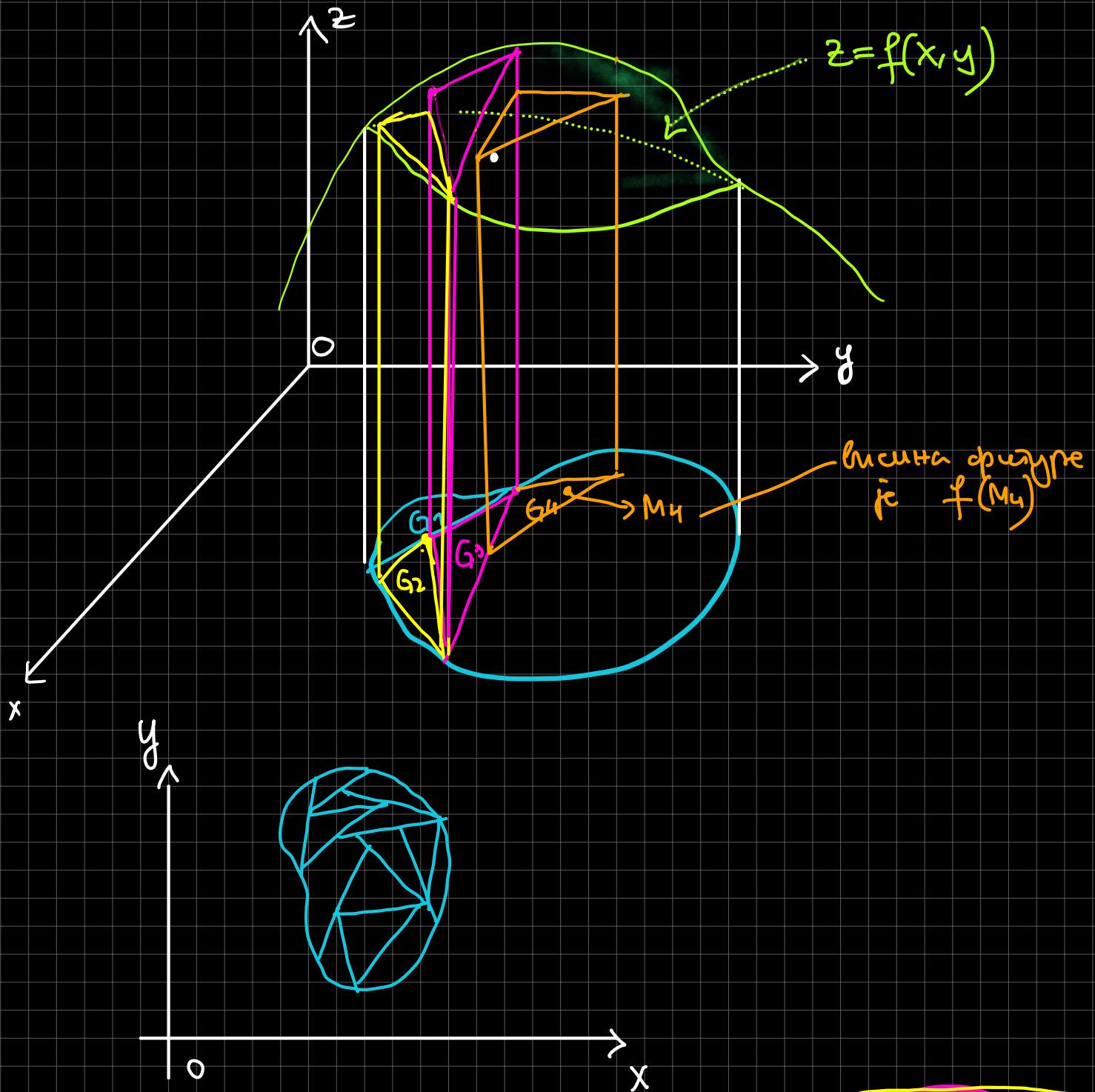
$$\oint_{\epsilon} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

2° Интеграл по произвољној кривој која спаја A и B унутар G , не зависи оу пута.

3° ... $P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ представља ТОТАЛНИ диференцијал.
.. $u(x,y)$ гедр. на области G .

$$4^{\circ} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

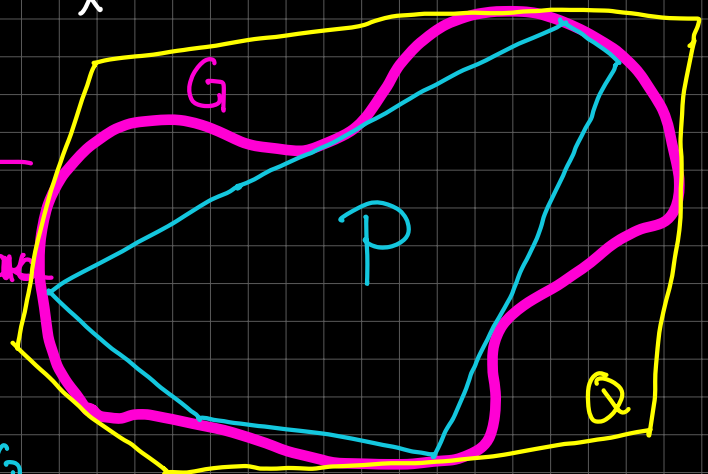
ДВОЙНИ ІНТЕГРАЛ



КВАДРАТНІ ФІГУРИ

Фігура —
обмежений скінчений
у площині

P — області ... вписані
у фігуру G

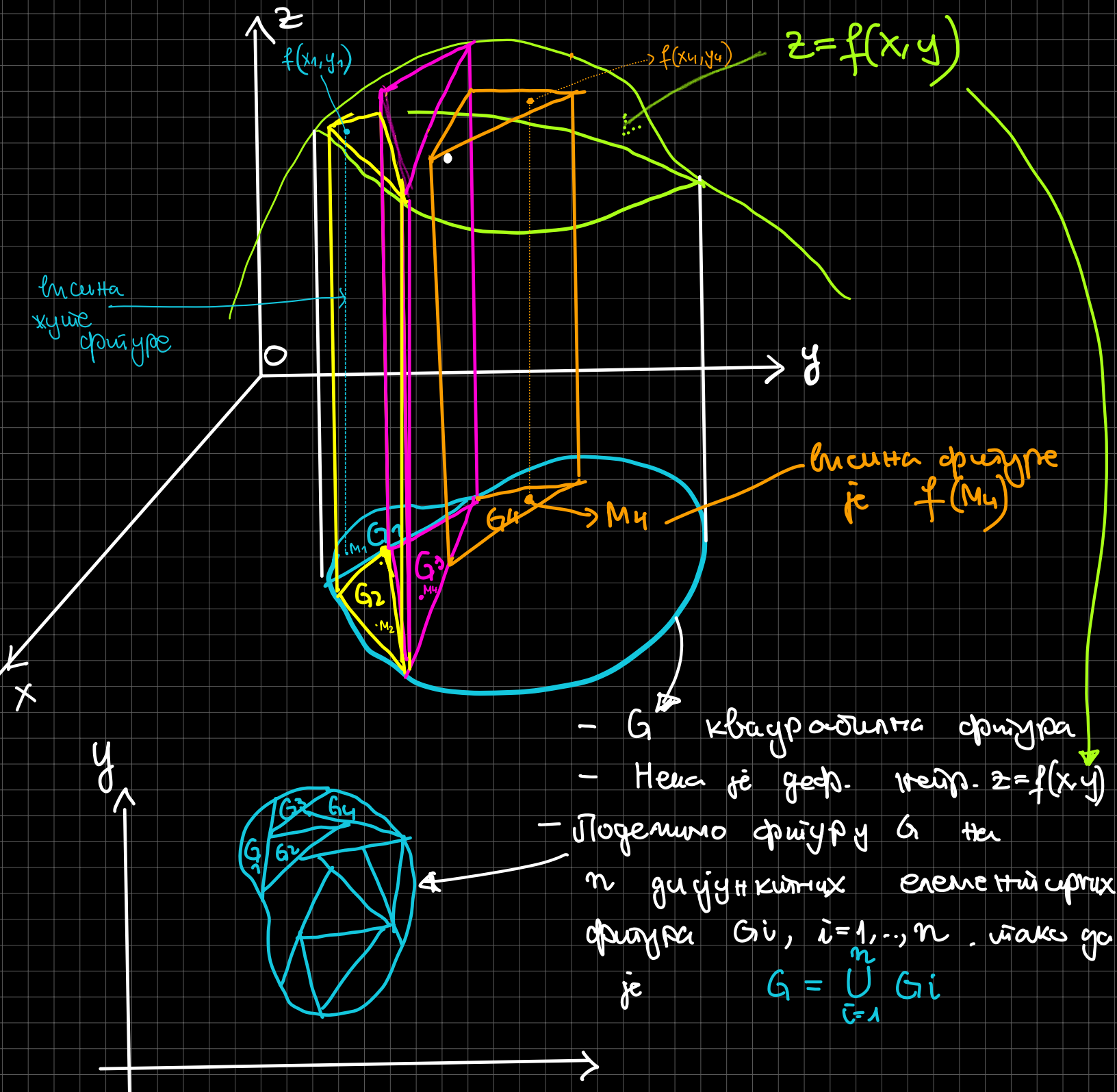


Q - одласи одр. нитрог. нитроген днацама одо G

- S^* ОПРЕДЕЛ. - множество y области G

... S_* индикатор ... обисиним око обисиним S

.. Укључује важи $S^* = S_* = S$ онда број S зовепо
површином означава $G \dots G$ КВАДРАТУРА

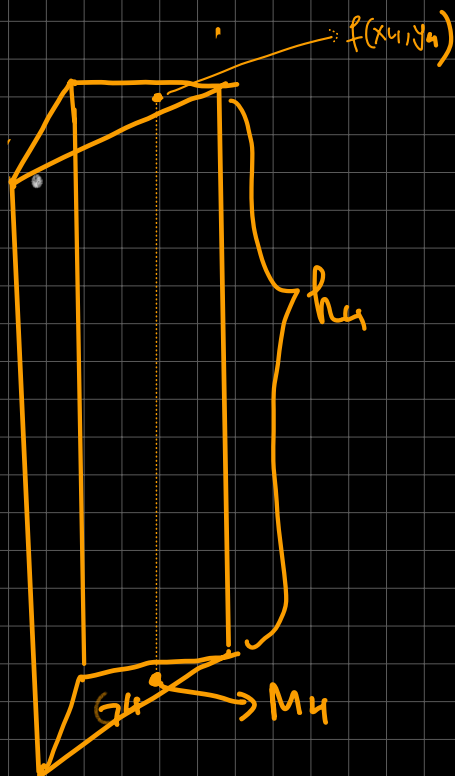


- у свакој погодности (фигури) G_i изаберемо тачку $M_i(x_i, y_i) \in G_i$

- Још мањомо вр. ф-је $z = f(x, y) : \boxed{f(x_i, y_i)} = h_i$

висине наших елементарних тела

- Како су G_i елем. фигуре $\Rightarrow$ њихова P се лако рачуна и нека је она $\Rightarrow \boxed{P(G_i) = \Delta S_i}$



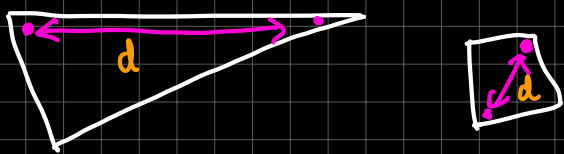
Збиром свих елементарних тела је:

$$\begin{aligned} P(G_4) \cdot f(M_4) &= \\ P(G_4) \cdot \underbrace{f(x_4, y_4)}_{h_4} &= \\ \Delta S_4 \cdot f(x_4, y_4) \end{aligned}$$

Формирамо интегралну суму

$$G_m = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

- Означимо са d - највећу од фигурантарних области G_i ДИЈАМЕТАР ОБЛАСТИ d



ЛЕД: Уколико посматрамо кон. пр. функцију итн. сума G_n када $n \rightarrow \infty$ када не зависи од поделе области G , нити од избора $\bar{M}_i \dots$

ДВОСТРУКИ ИНТЕГРАЛ је $f(x,y)$ у односи на G

$$\iint_G f(x,y) dx dy$$

ОСОБИНЕ:

1° ... $f(x,y)$ и $g(x,y)$ итн. ф-је на G .

$$\iint_G (f(x,y) \pm g(x,y)) dx dy = \iint_G f(x,y) dx dy \pm \iint_G g(x,y) dx dy$$

АДИТИВНОСТ

2° ... $f(x,y)$ итн. ф-ја на G , ... $k \cdot f(x,y) \dots$

$$\iint_G k \cdot f(x,y) dx dy = k \iint_G f(x,y) dx dy \quad \text{ХОМОГЕННОСТ}$$

3° ... $f(x,y)$ и $g(x,y) \dots f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in G$

$$\iint_G f(x,y) dx dy \leq \iint_G g(x,y) dx dy$$

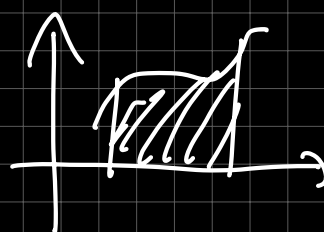
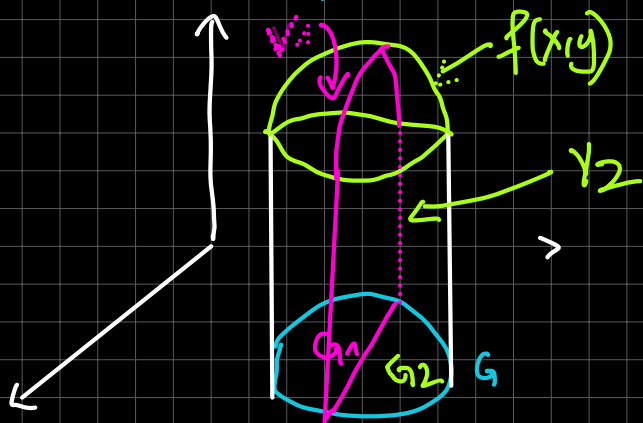
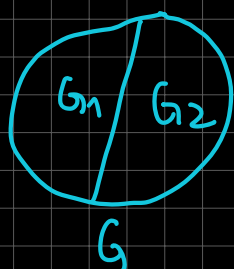
4°

Како је област G укупно где гугу: одн.

G_1 и $G_2 \dots f$ итн. на G . Тада је $f(x,y)$ итн. и на G_1 и G_2 и важи:

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \iint_{G_1} f(x,y) dx dy + \iint_{G_2} f(x,y) dx dy$$

$V_1 \quad + \quad V_2$



5° ... $f(x,y)$ итнй. G . Иага бори

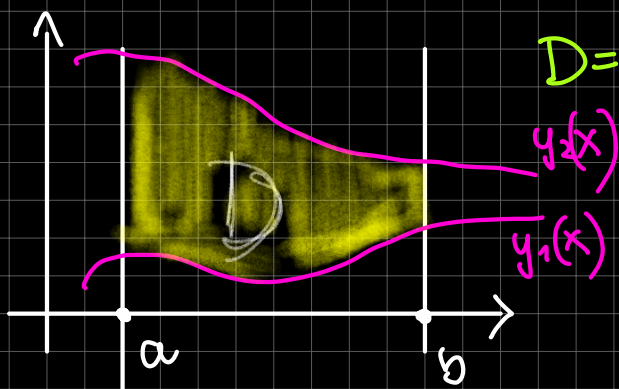
$$\left| \iint_G f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_G |f(x,y)| dx dy$$

ТЕОРЕМА: Зовором усноб га глосир. итнй. иосй
орн ё га је ф-ја $f(x,y)$ нелр. пс адасити G

КРИТЕРИЈИ
ИНТЕГРАБ.

ИЗРАЧУНА ВАЊЕ

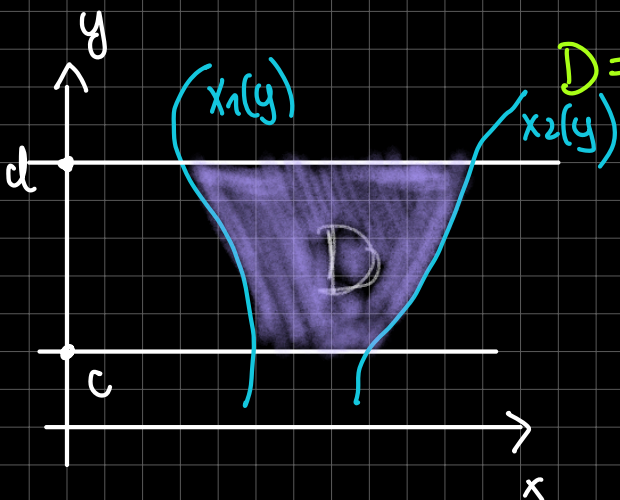
Претпосмљено га је адасити D мохе аргументални
арекс сиситема нелр. пс адасити:



$$D = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right] dx \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \end{aligned}$$

Претпосмљено га је адасити D мохе аргументални
арекс сиситема нелр. пс адасити:

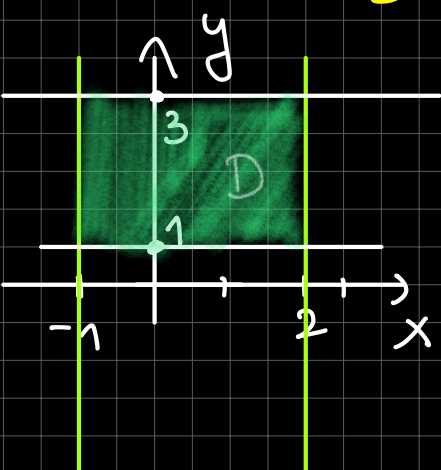


$$D = \{ (x,y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \right] dy \\ &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \end{aligned}$$

пример 1

$$\iint_D (x+y)^2 dx dy, \quad D = [-1, 2] \times [1, 3]$$



$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$$

сделай. сделай до. же в x

$$\iint_D (x+y)^2 dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_1^3 (x+y)^2 dy =$$

$$= \int_{-1}^2 dx \int_1^3 (x^2 + 2xy + y^2) dy =$$

$$= \int_{-1}^2 dx \left(x^2 y + 2x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^3 =$$

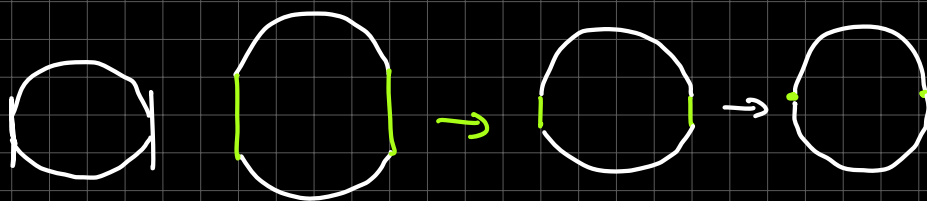
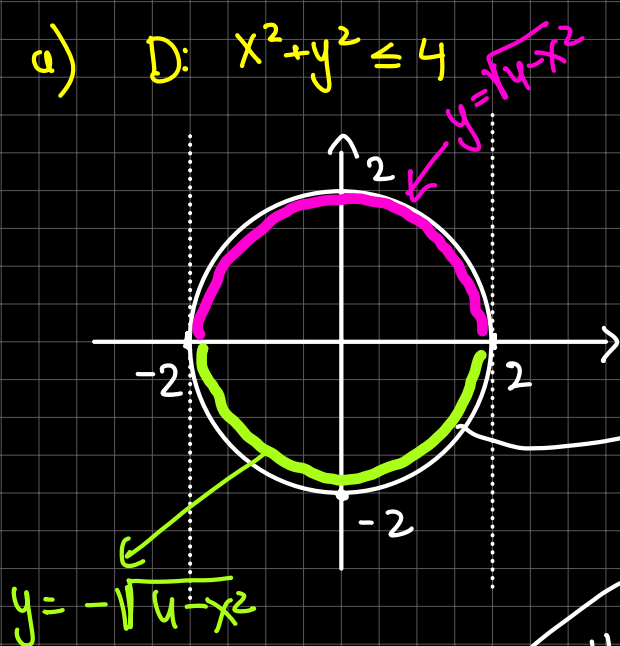
$$= \int_{-1}^2 \left(x^2 \cdot 3 + x \cdot 9 + \frac{27}{3} - x^2 \cdot 1 - x \cdot 1 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 \left(2x^2 + 8x + \frac{26}{3} \right) dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} + \frac{26}{3} x \Big|_{-1}^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{8}{3} + 8 \cdot \frac{4}{2} + \frac{26}{3} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot 1 + \frac{26}{3} = \dots = 44$$

пример 2 Итерационный интеграл в области $\int dx \int f dy$ и $\int dy \int f dx$, ако је D глас:

a) $D: x^2 + y^2 \leq 4$



$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, \dots\}$$

морамо наћи y -не $y = f(x)$ за $y = f(x)$ и $y = f(x)$

$x^2 + y^2 = 4 \leftarrow$ је кружице
тако заједно $y = f(x)$

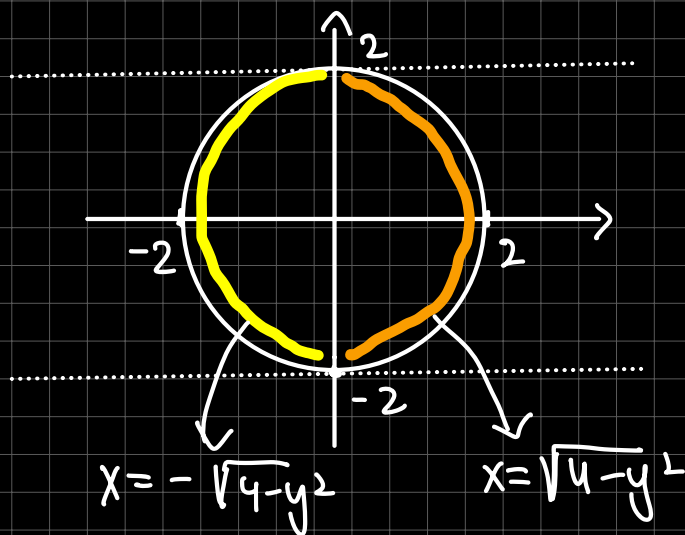
$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow y = \sqrt{4 - x^2} \\ &\leftarrow y = -\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4 - x^2}}^{\sqrt{4 - x^2}} f(x, y) dy$$



$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 2,$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

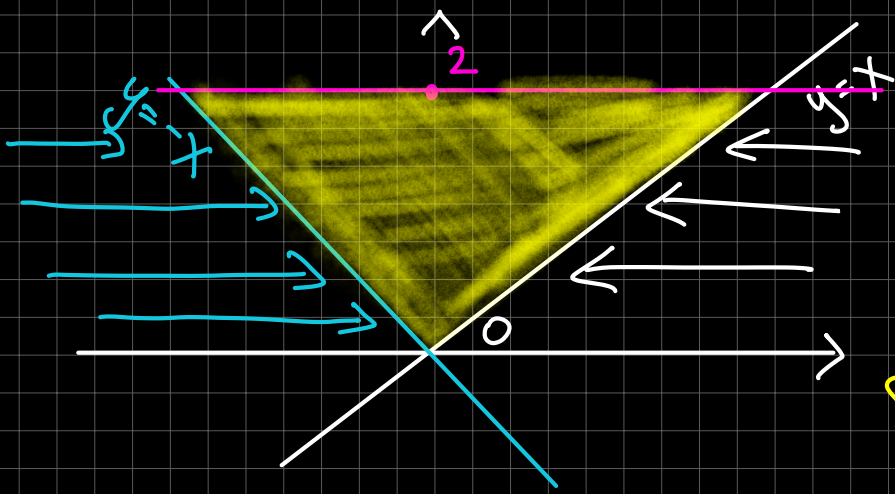
$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x = \pm \sqrt{4 - y^2}$$

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 2, -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4 - y^2}}^{\sqrt{4 - y^2}} f(x, y) dx$$

$$8) D: y = x, y = -x, y = 2$$

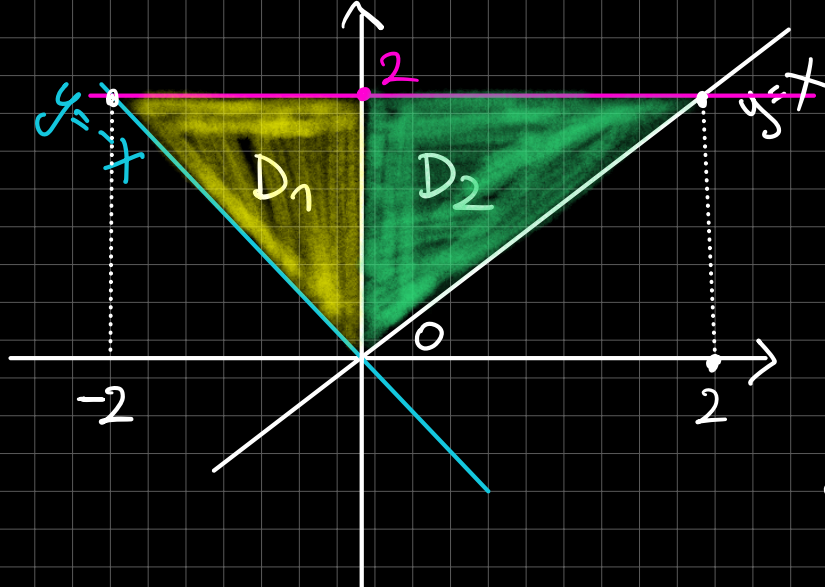


Полюс считаемо у осм.
консискили

$$y \in [0, 2]$$

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, -y \leq x \leq y\}$$

$$\iint_D f dx dy = \int_0^2 dy \int_{-y}^y f dx$$



$$D_1: x \in [-2, 0]$$

$$D_1 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 0, -x \leq y \leq 2\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_{-x}^2 f dy + \int_0^2 dx \int_x^2 f dy$$