

Analitička geometrija u prostoru $\mathbb{R}^3$

Rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ od tačke $M_2(x_2, y_2, z_2)$ jednako je intenzitetu vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$.

$$d(M_1, M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Središte $S(x_s, y_s, z_s)$ duži M_1M_2 je dato sa $x_s = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_s = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_s = \frac{z_1+z_2}{2}$.

Ravan

Svaka ravan α je jedinstveno određena tačkom $M(x_1, y_1, z_1)$ koja joj pripada i vektorom koji je na nju normalan $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$.

$\alpha: A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ skalarna jednačina ravni α

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ opšta jednačina ravni α , gde je $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ vektor normale ravni α

$\alpha: \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$ kanonska jednačina ravni α

Ravni α i β su *paralelne* ako se ne poklapaju i ako su im vektori normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ kolinearni, tj. ako važi $\vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta$, gde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ravni α i β se *seku* ako su im vektori normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ nisu kolinearni, tj. ako važi $\vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$, gde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ravni α i β su *normalne* ako su im vektori normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ normalni, $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$, tj. $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$.

Ugao između ravni α i β je ugao između njihovih vektora normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$, $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \leq \frac{\pi}{2}$ (uzimamo manji)

$$\cos \sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

Rastojanje tačke $M(x_1, y_1, z_1)$ od ravni $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ je dato sa $d(M, \alpha) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$.

Jednačina ravni α kroz tri nekolinearne tačke $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ je data sa

$\alpha: [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AX}] = 0$, gde je $X = (x, y, z)$.

Prava

Prava p je jedinstveno određena tačkom $M(x_1, y_1, z_1)$ koja joj pripada i vektorom pravca $\vec{p} = (a, b, c)$.

$p: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ kanonski oblik jednačine prave p

Iz kanonskog oblika dobijamo parametarski oblik jednačine prave $p: x = x_1 + at, y = y_1 + bt, z = z_1 + ct$.

Jednačina prave p može biti zadata kao presek dve ravni $p: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Jednačina prave kroz dve tačke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$p: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Rastojanje tačke T od prave p je dato sa: $d(T, p) = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{TP}|}{|\vec{p}|}$, gde je $\vec{p}$ vektor pravca prave p i $P \in p$.

Prave p_1 i p_2 su paralelne ako se ne poklapaju i ako su im vektori pravca kolinearni, tj. $\vec{p}_1 = \lambda \vec{p}_2$ gde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Neparalelne prave p_1 i p_2 se seku ako i samo ako

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

gde su $\vec{p}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{p}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ vektori pravca pravih p_1 i p_2 , $A(x_1, y_1, z_1) \in p_1$, $B(x_2, y_2, z_2) \in p_2$

Rastojanje između mimoilaznih pravih p_1 i p_2 je dato sa $d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|}$, $A \in p_1$, $B \in p_2$.

Ugao φ između prave p i ravni α dat je sa $\sin \varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}_\alpha|}$, gde je $\vec{p}$ vektor pravca prave p , $\vec{n}_\alpha$ vektor normale ravni α .