КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Функција облика $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ зове се квадратна функција, где је $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. График квадратне функције је крива под називом **парабола** .

2. Квадратна функција је дефинисана на скупу $\mathbb{R}$. Домен (област дефинисаности) је $D_f = \mathbb{R}$.

3. Кодомен (област вредности функције).

ако је $\boldsymbol{a} > 0$ $K_f = [\mathrm{m}, \infty)$ **ако је $\boldsymbol{a} < 0$** $K_f = (-\infty, \mathrm{m}]$, m- екстремна вредност функције

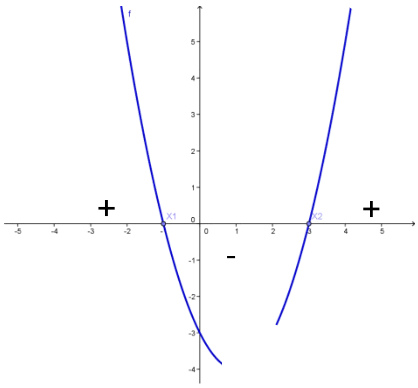
4. Нула функције $\boldsymbol{y = 0} \implies ax^2 + bx + c = 0 \implies x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

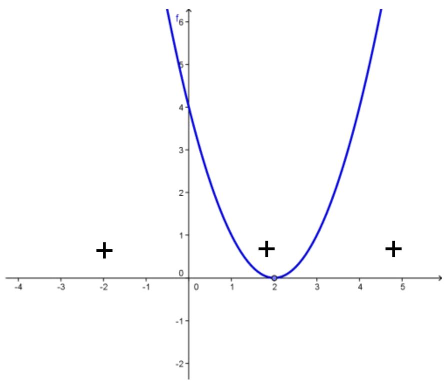
Израз под кореном означава се са D и назива се **дискриминанта.**

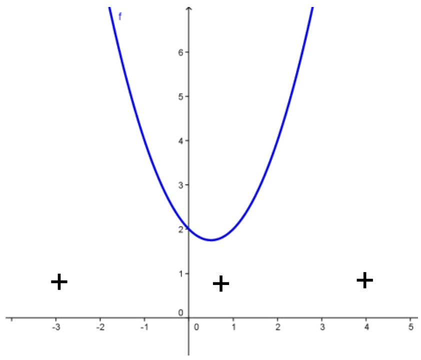
ако је $\boldsymbol{a} > 0$

Функција је дефинисана $\forall x \in \mathbb{R}$, функција је конвексна

(парабола је окренута "нагоре")







за $\boldsymbol{D} > 0$ знамо $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ - функција сече x - осу у x_1 и x_2

за $\boldsymbol{D = 0}$ знамо $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ - функција сече x - осу у $x_1 = x_2$

за $\boldsymbol{D} < 0$ знамо $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ - функција не сече $x -$ осу

4. нула функције

$y = 0$ за x_1, x_2

5. знак функције

$y < 0$ за $x \in (x_1, x_2)$

$y > 0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

4. нула функције

$y = 0$ за $x_1 = x_2$

5. знак функције

$y \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4. функција нема нулу

5. знак функције

$y > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- функција има минимум у темену $T(\alpha, \beta)$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad , \quad \beta = -\frac{D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

6. монотоност функције

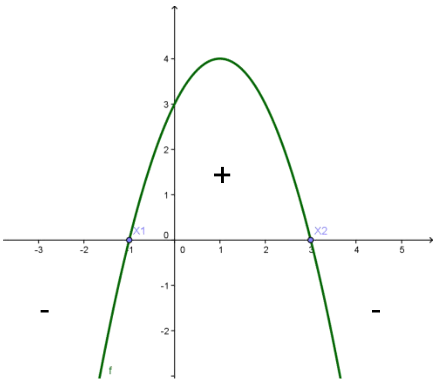
функција расте за $x \in (\alpha, +\infty)$

функција опада за $x \in (-\infty, \alpha)$

7. пресек са y-осом је коефицијент c

ако је $a < 0$

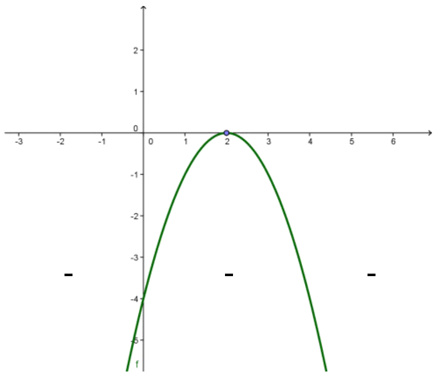
Функција је дефинисана $\forall x \in \mathbb{R}$, функција је конкавна (парабола је окренута "надоле")



за $\boldsymbol{D} > 0$ знамо $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- функција сече x - осу у x_1 и x_2

4. нула функције
$y = 0$ за x_1, x_2

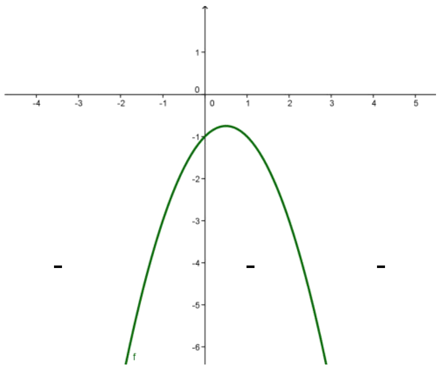
5. знак функције
$y < 0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$y > 0$ за $x \in (x_1, x_2)$



за $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ знамо $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$
- функција сече x - осу у $x_1 = x_2$

4. нула функције
$y = 0$ за $x_1 = x_2$

5. знак функције
$y \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$



за $\boldsymbol{D} < 0$ знамо $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$
- функција не сече x - осу

4. функција нема нулу

5. знак функције
$y < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

- функција има максимум у темену $T(\alpha, \beta)$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad , \quad \beta = -\frac{D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

6. монотоност функције
функција расте за $x \in (-\infty, \alpha)$
функција опада за $x \in (\alpha, +\infty)$

7. пресек са y-осом је коефицијент c

1. Испитати функције и скицирати њихове графике

а) $y = x^2 - 4x + 3$ **б)** $y = -x^2 + 2x + 3$ **в)** $y = x^2 - 4x + 5$ **г)** $y = -(x+3)^2$

а) $\boldsymbol{y = x^2 - 4x + 3}$
- домен $D_f = \mathbb{R}$
- кодомен $K_f = [-1, \infty)$

$a = 1, b = -4, c = 2$
- $a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна
- нула функције

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0 \implies$ два реална различита решења $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{matrix}\right\} \text{пресек са } x\text{-осом}$$

- теме функције $T(\alpha, \beta)$

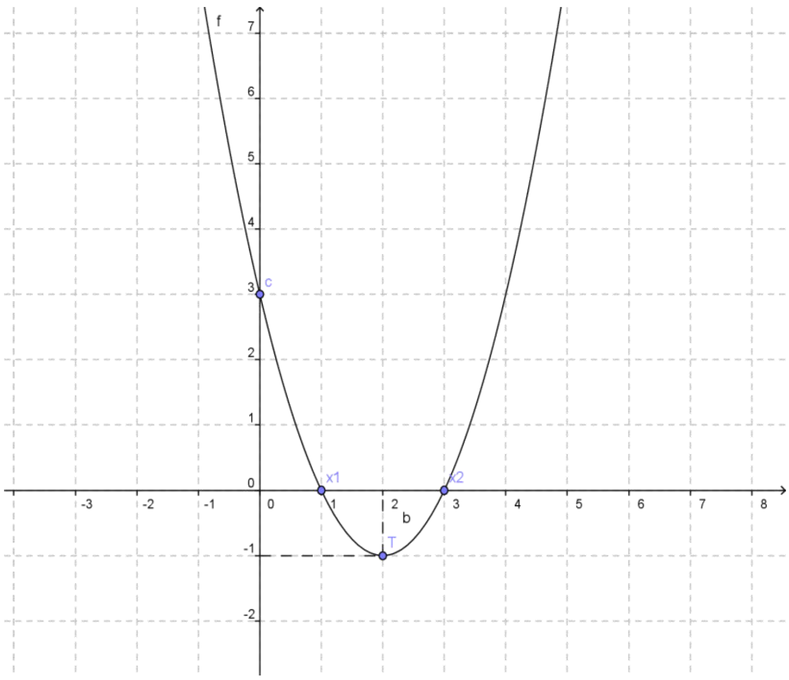
$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad ,$$
$$\beta = -\frac{D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$\alpha = -\frac{-4}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{4}{4} \quad \Rightarrow$
$\alpha = 2 \quad , \quad \beta = -1 \;\Rightarrow\; T(2, -1)$
функција има минимум у
$T_{min}(2, -1)$

- знак функције
$y < 0$ за $x \in (1, 3)$
$y > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- монотоност функције
функција расте за $x \in (2, +\infty)$
функција опада за $x \in (-\infty, 2)$

- пресек са *y*-осом је коефицијент *c=3*

График функције изгледа



b) $\boldsymbol{y = -x^2 + 2x + 3}$

- домен $D_f = \mathbb{R}$
- кодомен $K_f = (-\infty, 4]$

$a = -1 \, , b = 2 \, , c = 3$

- $a = -1 < 0 \;\Rightarrow$ функција је конкавна
- нула функције

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0 \Rightarrow$ два реална различита решења $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

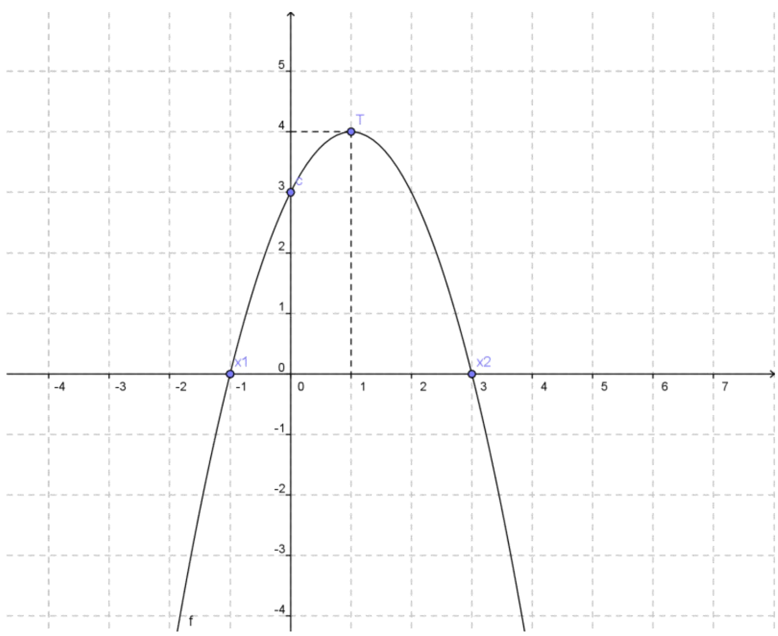
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \quad \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{2}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-6}{-2} = 3 \end{matrix}\right\} \text{ пресек са } x\text{-осом}$$

- теме функције $T(\alpha, \beta)$
$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad , \quad \beta = -\frac{D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$
$\alpha = -\frac{2}{-2} \quad , \quad \beta = -\frac{16}{-4} \quad \Rightarrow$
$\alpha = 1 \quad , \quad \beta = 4 \;\Rightarrow\; T(1,4)$
функција има максимум у $T_{max}(1,4)$

- знак функције
$y < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
$y > 0$ за $x \in (-1, 3)$

- монотоност функције
функција расте за $x \in (-\infty, 1)$
функција опада за $x \in (1, +\infty)$

- пресек са *y*-осом је коефицијент *c=3*



в) $y = x^2 - 4x + 5$

- домен $D_f = \mathbb{R}$
- кодомен $K_f = [1, \infty)$

$a = 1\,, b = -4\,, c = 5$

- $a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна
- нула функције

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0 \Longrightarrow$ два коњуговано комплексна решења $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$

<u>нема пресека са *x*-осом</u>

- теме функције $\mathrm{T}(\alpha, \beta)$

$\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = -\frac{D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$\alpha = -\frac{-4}{2}$, $\beta = -\frac{-4}{4} \implies$

$\alpha = 2$, $\beta = 1 \implies T(2{,}1)$

функција има минимум у $T_{min}(2{,}1)$

- знак функције

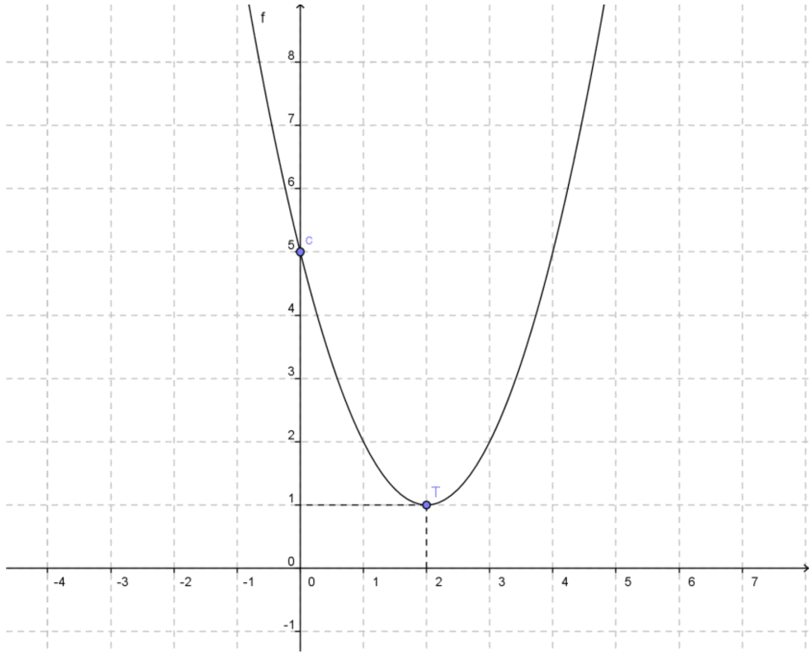
$y > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$

- монотоност функције

функција расте за $x \in (2, +\infty)$

функција опада за $x \in (-\infty, 2)$

- пресек са *y*-осом је коефицијент *c=5*



г) $y = -(x+3)^2 = -x^2 - 6x - 9$

- домен $D_f = \mathbb{R}$
- кодомен $K_f = (-\infty, 0]$
- $a = -1 < 0 \implies$ функција је конкавна
- нула функције

$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \Longrightarrow$ једно двоструко реално решење $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6}{-2} - 3 \qquad \text{додир са } x\text{-осом}$$

- Теме функције $\mathrm{T}(\alpha, 0)$

$\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = 0$

$\alpha = -3$, $\beta = 0 \implies T(-3{,}0)$

функција има максимум у $T_{max}(-3{,}0)$

- знак функције

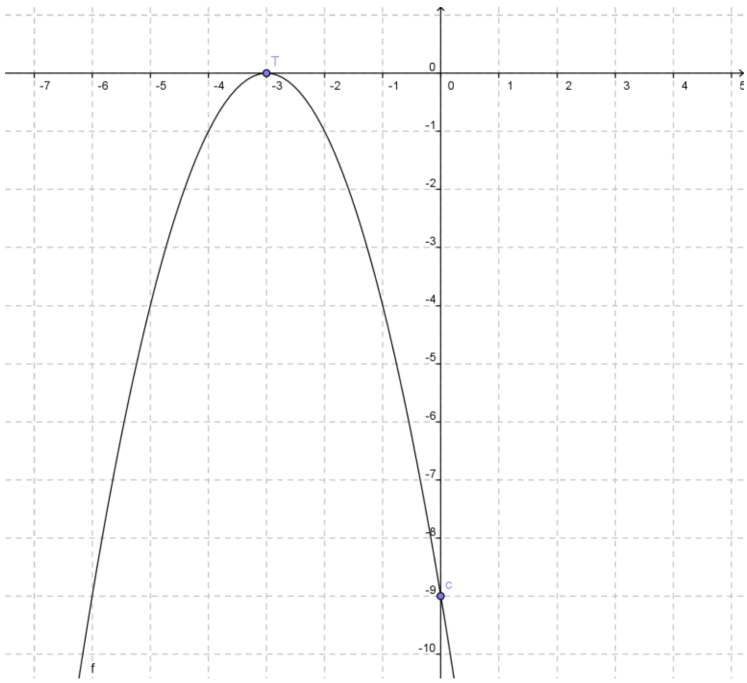
$y < 0$ за $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

- монотоност функције

функција расте за $x \in (-\infty, -3)$

функција опада за $x \in (-3, +\infty)$

- пресек са *y*-осом је коефицијент *c= - 9*



КВАДРАТНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Основни тип

1. $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

тражимо нуле функције

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$a = 1\,, b = -5\,, c = 4$

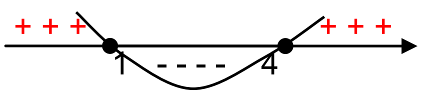
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ $x_1 = \frac{5+3}{2}$ $\vee$ $x_2 = \frac{5-3}{2}$

$x_1 = 4$ $\vee$ $x_2 = 1$

$a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна



Тражи се интервал на којем је ф-ја ≥ 0 (због једнакости укључују се и нуле функције) па је решење:

$x \in (-\infty, 1] \cup [4, \infty)$

2. $3x^2 - 2x + 4 > 0$

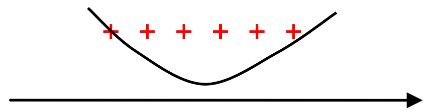
тражимо нуле функције

$3x^2 - 2x + 4 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -44$

$D < 0 \implies$ ф-ја нема нуле

$a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна



Тражи се интервал на којем је ф-ја > 0 што важи за свако x па је решење:

$x \in \mathbb{R}$

3. $-4x^2 + 4x - 1 > 0$

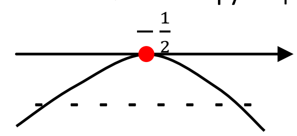
тражимо нуле функције

$-4x^2 + 4x - 1 = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{b}{2a} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

$a = -1 < 0 \implies$ функција је конкавна



Тражи се интервал на којем је ф-ја > 0 у нашем случају је ф-ја увек негативна, значи да не постоји такав интервал, па је решење: $x \in \{\emptyset\}$

4. $(x^2 + 4x + 3)(x^2 - 9x + 14) \leq 0$ - дату неједначину решавамо тако што нађемо нуле оба тринома

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$

$x_1 = \frac{-4+2}{2}$ $\vee$ $x_2 = \frac{-4-2}{2}$

$x_1 = -1$ $\vee$ $x_2 = -3$

$a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна ☺

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 25$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$

$x_1 = \frac{9+5}{2}$ $\vee$ $x_2 = \frac{9-5}{2}$

$x_1 = 7$ $\vee$ $x_2 = 2$

$a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна ☺

		-3	-1	2	7
$x^2 + 4x + 3$	+	-	+	+	+
$x^2 - 9x + 14$	+	+	+	-	+
	+	**-**	**+**	**-**	**+**

тражимо интервал на коме је дати производ ф-ја ≤ 0

(због једнакости укључују се и нуле)

$\boldsymbol{x \in [-3, -1] \cup [2, 7]}$

5. $\frac{2x-6}{x^2+2x+1} > 0$ - Дату неједначину решавамо тако што нађемо нуле бројиоца и имениоца

$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

линеарна ф-ја је ↗

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x_{1/2} = -1$

$a = 1 > 0 \implies$ функција је конвексна ☺

		-1	3
$2x - 6$	-	-	+
$(x+1)^2$	+	+	+
	-	**-**	**+**

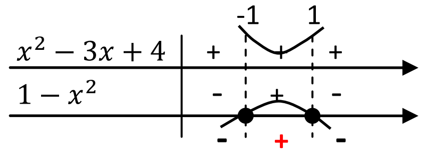
тражимо интервал на коме је дати количник ф-ја > 0

$\boldsymbol{x \in (3, \infty)}$

6. $\frac{x^2-3x+4}{1-x^2} \geq 0$

$x^2-3x+4=0$
$D=(-3)^2-4\cdot 4=-7$
$D<0 \Longrightarrow$ ф-ја нема нуле
$a=1>0 \implies$ функција је конвексна ☺

$1-x^2=0$
$(1+x)(1-x)=0$
$x_1=-1 \;\lor\; x_2=1$
$a=-1>0 \implies$ функција је конкавна ☹

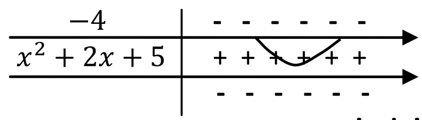


тражимо интервал на коме је дати количник ф-ја ≥ 0
(нуле имениоца не смеју бити укључене:
услов: $1-x^2 \neq 0$ због дељења са нулом!)
$\boldsymbol{x \in (-1,1)}$

7. $\frac{-4}{x^2+2x+5} > 0$

\- 4 је негативан број

$x^2+2x+5=0$
$D=(2)^2-4\cdot 5=-16$
$D<0 \Longrightarrow$ ф-ја нема нуле
$a=1>0 \implies$ функција је конвексна ☺



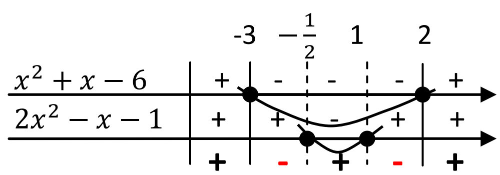
тражимо интервал на коме је ф-ја >0 у нашем случају такав интервал не постоји, па је решење: $\boldsymbol{x} \in \{\emptyset\}$

8. $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1} \leq -1$

$$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}+1 \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+2x-5+2x^2-x-1}{2x^2-x-1} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1} \leq 0$$

$x^2+x-6=0$
$D=25$
$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm 5}{2\cdot 1}$
$x_1=\frac{-1+5}{2} \;\lor\; x_2=\frac{-1-5}{2}$
$x_1=2 \;\lor\; x_2=-3$
$a=1>0 \implies$ функција је конвексна ☺

$2x^2-x-1=0$
$D=9$
$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 3}{2\cdot 1}$
$x_1=\frac{1+3}{4} \;\lor\; x_2=\frac{1-3}{4}$
$x_1=1 \;\lor\; x_2=-\frac{1}{2}$
$a=1>0 \implies$ функција је конвексна ☺



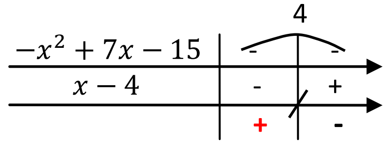
тражимо интервал на коме је дати количник ф-ја ≤ 0
(због једнакости укључују се и нуле бројиоца, док нуле имениоца не смеју бити укључене)
$\boldsymbol{x} \in [-3,-\frac{1}{2}) \cup (1,2]$

9. $-2<\frac{-x^2+5x-7}{x-4} \leq 1$ - дату неједначину поделимо на два случаја и онда тражимо пресек решења тих случајева

❶ $-2<\frac{-x^2+5x-7}{x-4} \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+5x-7}{x-4}>-2 \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+5x-7}{x-4}+2>0 \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+5x-7+2(x-4)}{x-4}>0 \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+7x-15}{x-4}>0$

$-x^2+7x-15=0$
$D=7^2-4\cdot 15=-11$
$D<0 \Longrightarrow$ ф-ја нема нуле
$a=-1>0 \implies$ функција је конкавна ☹

$x-4=0 \Rightarrow x=4$
линеарна ф-ја је ↗

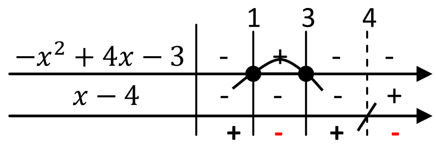


тражимо интервал на коме је дати количник ф-ја >0
$\boldsymbol{x \in (-\infty,4)}$

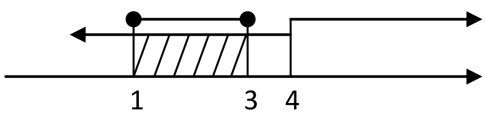
❷ $\frac{-x^2+5x-7}{x-4} \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+5x-7}{x-4} - 1 \leq 0 \;\Rightarrow \frac{-x^2+5x-7-x+4}{x-4} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{-x^2+4x-3}{x-4} \leq 0$

$-x^2 + 4x - 3 = 0$
$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2}$
$x_1 = \frac{-4+2}{-2} \;\vee\; x_2 = \frac{-4-2}{-2}$
$x_1 = 1 \;\vee\; x_2 = 3$
$a = -1 > 0 \;\Longrightarrow$ функција је конкавна ☹

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$
линеарна ф-ја је ↗



тражимо интервал на коме је дати количник ф-ја ≤ 0
$\boldsymbol{x \in [1, 3] \cup (4, \infty)}$



из ❶ ∩ ❷ ⇒ $\boldsymbol{x \in [1, 3]}$

Задаци за вежбу:

1. $x^2 + 5x - 6 \leq 0$ **2.** $3x^2 - 11x - 4 < 0$ **3.** $-4x^2 - 6x + 4 > 0$ **4.** $-x^2 - 6x - 8 \leq 0$

5. $(3x-2)^2 + (x-2)^2 < 2$ **6.** $(2x-1)^2 - (x^2+3) < x - 4$ **7.** $(x^2 - 5x - 6)(x^2 + x - 12) < 0$

8. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$ **9.** $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} \geq -3$ **10.** $0 \leq \frac{x^2+x}{x^2-6x+9} \leq \frac{1}{2}$