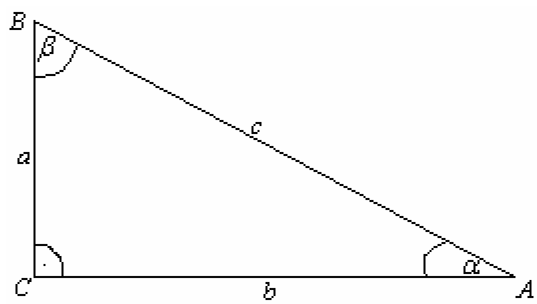
TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE OŠTROG UGLA

Trigonometrija je prvobitno predstavljala oblast matematike koje se bavila izračunavanjem nepoznatih elemenata trougla pomoću poznatih. Sam njen naziv potiče od dve grčke reči TRIGONOS- što znači trougao i METRON- što znači mera. Kako se definišu trigonometrijske funkcije?

Posmatrajmo pravougli trougao ABC.

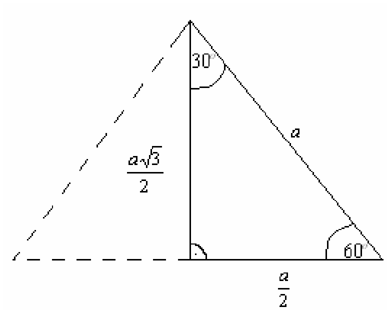


$a,b \rightarrow$ katete
$c \rightarrow$ hipotenuza
$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow$ Pitagorina teorema

$$\sin\alpha = \frac{naspramna\ \ kateta}{hipotenuza} = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{nalegla\ \ kateta}{hipotenuza} = \frac{b}{c}$$
$$tg\alpha = \frac{naspramna\ \ kateta}{nalegla\ \ kateta} = \frac{a}{b}$$
$$ctg\alpha = \frac{nalegla\ \ kateta}{naspramna\ \ kateta} = \frac{b}{a}$$

PAZI: Sam simbol sin,cos,tg,ctg sam za sebe ne označava nikakvu veličinu! Uvek mora da ima i ugao.

Izračunajmo vrednost trigonometrijskih funkcija za uglove od $30^o, 45^o$ ***i*** 60^o. Najpre ćemo posmatrati polovinu jednakostraničnog trougla.



Kao što znamo visina jednakostraničnog trougla je :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^o = \frac{naspramna\ kateta}{hipotenuza} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{nalegla\ kateta}{hipotenuza} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^o = \frac{naspramna\ kateta}{nalegla\ kateta} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(racionališemo) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30^o = \frac{nalegla\ kateta}{naspramna\ kateta} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

Sada ćemo uraditi (po definiciji) i za ugao od 60^o.

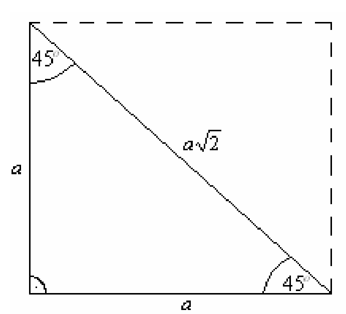
$$\sin 60^o = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^o = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60^o = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Za vrednost trigonometrijskih funkcija ugla od 45^o upotrebićemo polovinu kvadrata.



Kao što znamo dijagonala kvadrata je $d = a\sqrt{2}$

$$\sin 45^o = \frac{naspramna\ kateta}{hipotenuza} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{nalegla\ kateta}{hipotenuza} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 45^o = \frac{naspramna\ kateta}{nalegla\ kateta} = \frac{a}{a} = 1$$

$$ctg 45^o = \frac{nalegla\ kateta}{naspramna\ kateta} = \frac{a}{a} = 1$$

Na ovaj način smo dobili tablicu:

	$\alpha = 30^o$	$\alpha = 45^o$	$\alpha = 60^o$
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Naravno, kasnije ćemo tablicu proširiti na sve uglove od $0^o \to 360^o$.

Osnovni trigonometrijski indetiteti:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

Da probamo da dokažemo neke od indetiteta:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$(pogledajmo definicije: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; to da zapamtimo)=
$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$=(važi Pitagorina teorema, $a^2+b^2=c^2$)$= \frac{c^2}{c^2} = 1$

2) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}=tg\alpha$ slično se dokazuje i za $ctg\alpha$

4) $tg\alpha\cdot ctg\alpha=$(zamenimo iz definicije, da je $tg\alpha=\frac{a}{b}$ i $ctg\alpha=\frac{b}{a}$)$=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

Baš lako, zar ne?

Iz osnovnih indetiteta se mogu izvesti razne druge jednakosti:

1) Ako krenemo od:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\rightarrow$ ovo delimo sa $\cos^2\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\rightarrow$ Odavde izrazimo $\cos^2\alpha$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1}{tg^2\alpha+1}}$$

Ako sad ovo zamenimo u:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha+\frac{1}{tg^2\alpha+1}=1$$

$$\sin^2\alpha=1-\frac{1}{tg^2\alpha+1}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{tg^2\alpha+1-1}{tg^2\alpha+1}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}}$$

Ove dve identičnosti ćemo zapisati i koristiti ih u zadacima!!!

Još jedna stvar, da izvedemo i trigonometrijske funkcije komplementnog ugla. Kako je kod pravouglog trougla $\alpha+\beta=90^o$ tj. komplementni su, važi:

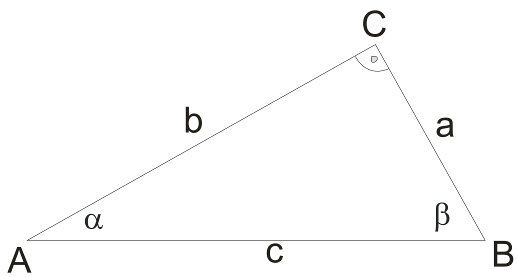
$\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$ tj. $\sin\beta = \cos\alpha$

$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos\beta = \sin\alpha$

$tg(90^o - \alpha) = ctg\alpha$ $tg\beta = ctg\alpha$

$ctg(90^o - \alpha) = tg\alpha$ $ctg\beta = tg\alpha$

<u>Odakle ovo?</u>



sa slike (po definiciji) je

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad tg\beta = \frac{b}{a}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \qquad ctg\beta = \frac{a}{b}$$

Primer:

1) Date su katete pravouglog trougla *a*=8cm i *b*=6cm. Odrediti vrednost svih trigonometrijskih funkcija uglova α i β

$a = 8cm$

$b = 6cm$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 8^2 + 6^2$

$c^2 = 64 + 36$

$c^2 = 100$

$c = 10cm$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \sin\beta$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = ctg\beta$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = tg\beta$$

TRIGONOMETRIJSKI KRUG

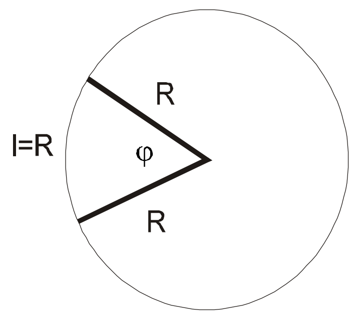
Uglovi mogu da se mere u stepenima i radijanima. Sa pojmom stepena smo se upoznali još u osnovnoj školi i ako se sećate , njega smo podelili na minute i sekunde.(1^0=60\` , 1\`=60\`\`). Da bi objasnili šta je to radijan, posmatraćemo kružnicu poluprečnika R .Obim kružnice se računa po formuli O= $2R\pi$, a znamo da je $\pi \approx 3{,}14$ .Ako uzmemo deo te kružnice (kružni luk) koji je dužine baš R , njemu odgovara neki centralni ugao φ.

Mera centralnog ugla koji odgovara luku dužine R je jedan radijan.

Jasno je da onda pun ugao ima 2π radijana. Odnosno:

$360^0=2\pi$ radijana

$180^0=\pi$ **ZAPAMTI**



$$1^0 = \frac{\pi}{180} radijana$$

Važi dakle: $$1` = \frac{\pi}{180*60} radijana$$

$$1`` = \frac{\pi}{180*60*60} radijana$$

I obrnuto: $1rad = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17` 45``$

Primer 1:

Nađi radijansku meru ugla od:

a) 75^0

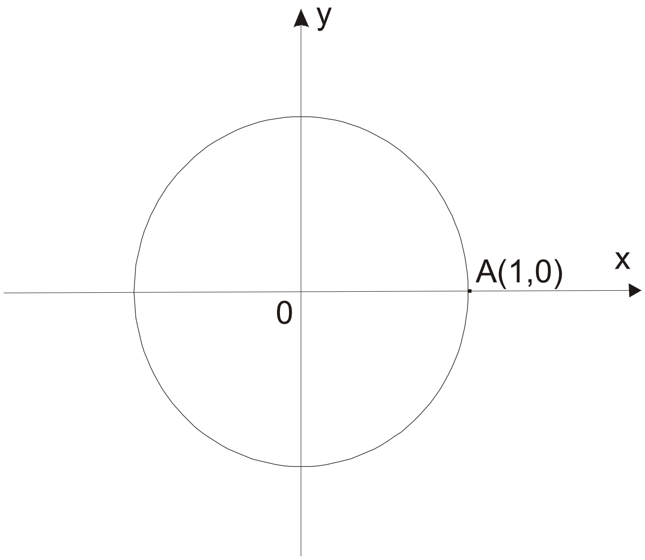
b) 245^0

v) $82^0 30`$

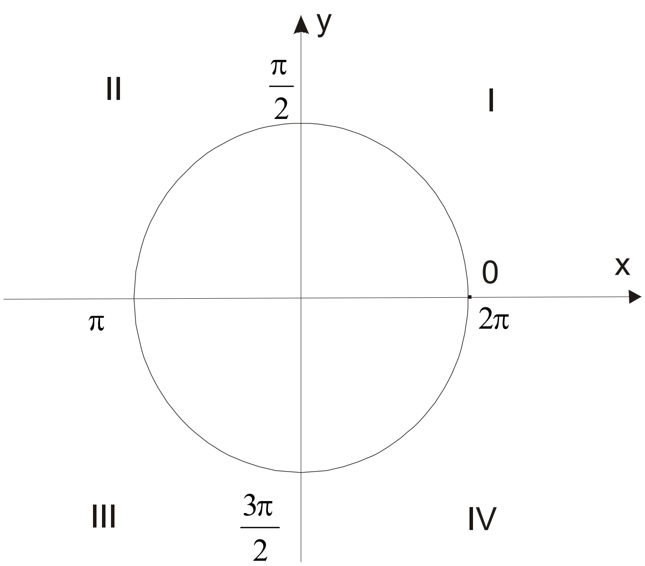
Rešenje: a) Kako je $1^0 = \frac{\pi}{180} radijana$ to je $75^0 = 75\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$

b) $245^0 = 245\frac{\pi}{180} = \frac{49\pi}{36}$

v) $82^0 30` = 82\frac{\pi}{180} + 30\frac{\pi}{180*60} = \frac{11\pi}{24}$



TRIGONOMETRIJSKI KRUG je krug poluprečnika 1 čiji je centar u koordinatnom početku.
Tačka A(1,0) koja pripada trigonometrijskom krugu zove se POČETNA tačka.
Na trigonometrijskom krugu ćemo posmatrati različite lukove koji svi počinju u tački A. Luk koji obilazimo u smeru suprotnom od kazaljke na časovniku je POZITIVAN luk, a u smeru kazaljke je NEGATIVAN luk.
Uglovi po kvadrantima idu ovako:



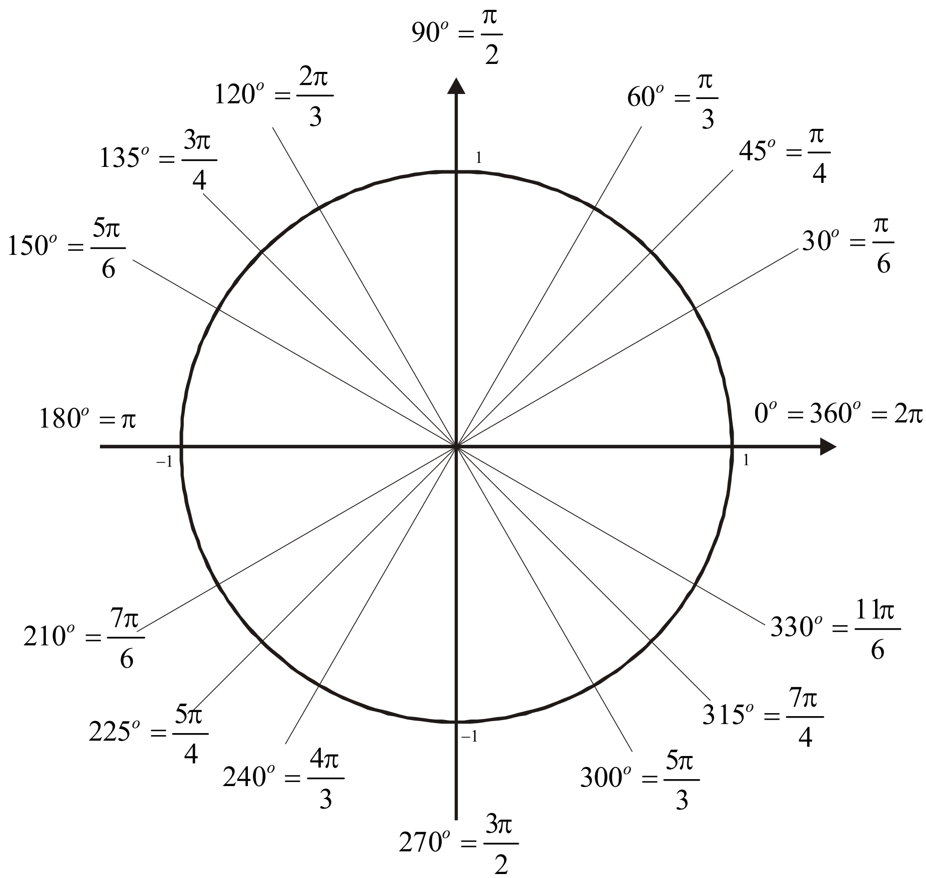
iz I kvadranta: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

iz II kvadranta : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

iz III kvadranta : $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

iz IV kvadranta : $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Uglovi $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, su granični i podrazumeva se da nisu ni u jednom kvadrantu.
Uglove čije ćemo vrednosti očitavati sa trigonometrijskog kruga su sledeći:

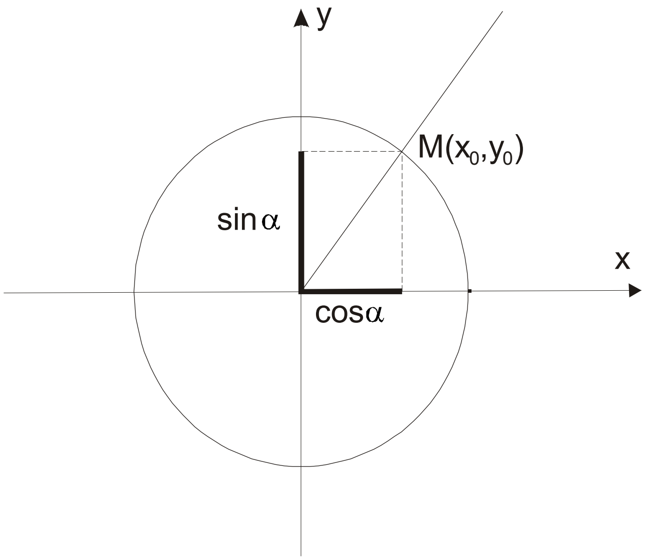


Sinus i kosinus proizvoljnog ugla

Za bilo koji proizvoljan ugao uvek jedan krak poklopimo sa *x*- osom, tj, sa početnom tačkom A(1,0), drugi krak seče trigonometrijski u nekoj tački $M(x_0,y_0)$. Iz te tačke spustimo normale na *x* i *y* osu. Te dužine su:

- **Na x-osi cosα (cosα =x_0)**

- **Na y-osi sinα (sinα =y_0)**



Evo našeg predloga kako da zapamtite vrednosti i da ih “ pročitate” sa kruga.

Zapamtimo tri broja:

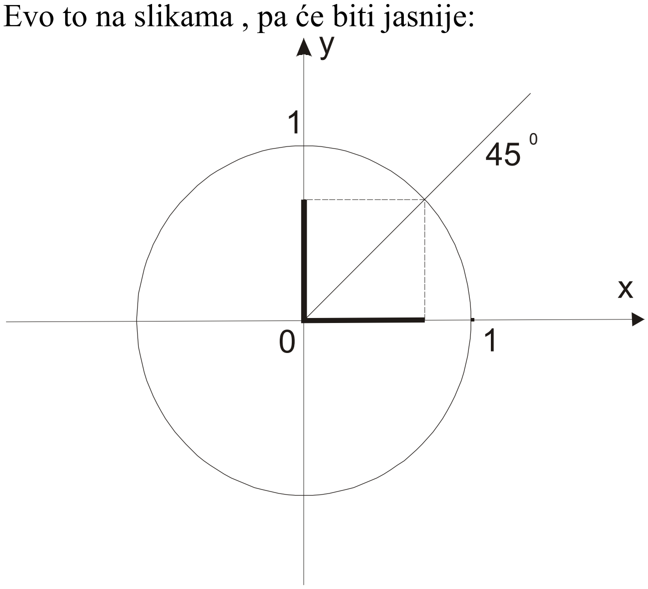
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

koji su poređani od najmanjeg do najvećeg.

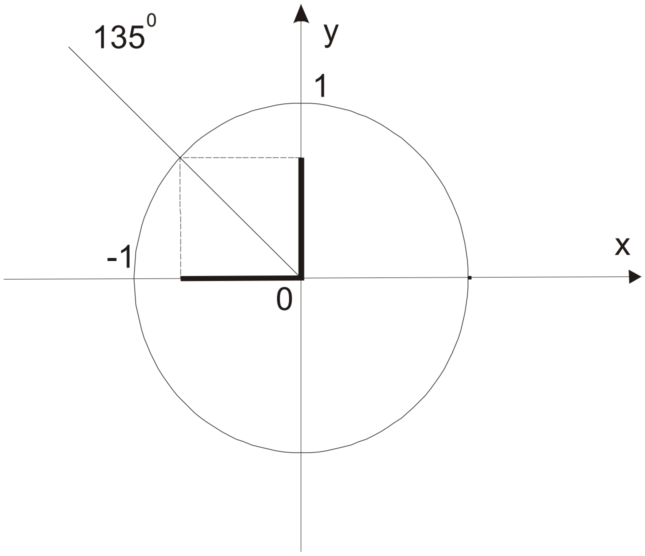
Broj u sredini $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **odgovara uglovima koji su sredine kvadranata!**

Znači sinusi i kosinusi uglova od 45 , 135 , 225 i 315 stepeni imaju vrednost $\frac{\sqrt{2}}{2}$, samo vodimo računa da li je ta vrednost $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

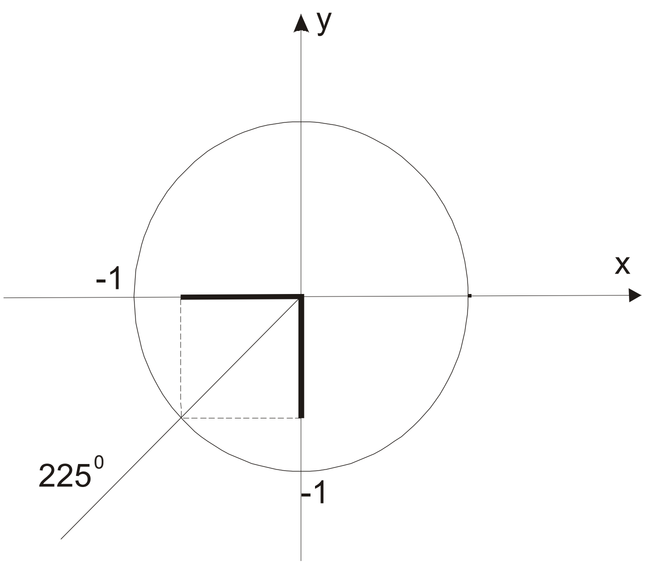
Evo to na slikama , pa će biti jasnije:



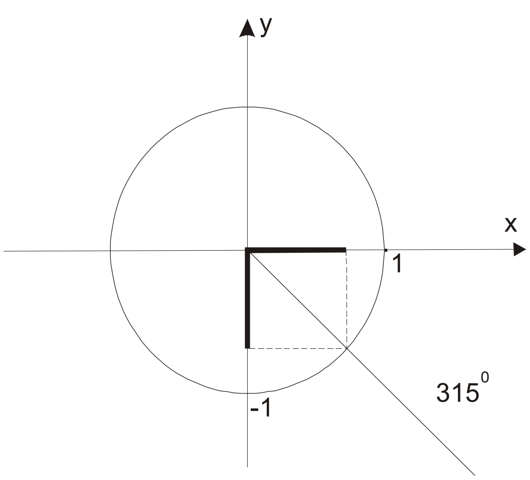
sin 45^0=cos45^0= $\frac{\sqrt{2}}{2}$



sin 135^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ a **cos 135^0**= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$



sin 225^0= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos 225^0= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$



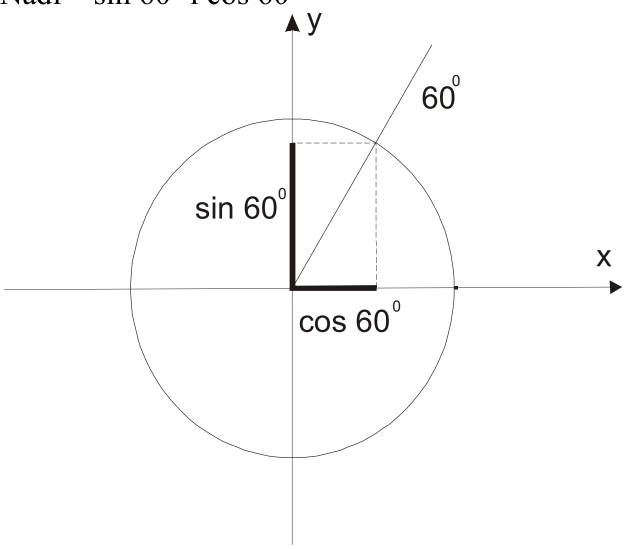
sin 315^0= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a cos 315^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Za ostale uglove vrednosti će biti $\frac{1}{2}$ ili $\frac{\sqrt{3}}{2}$, naravno opet gledamo da li je + ili - .

Evo par primera:

Primer1.

Nađi $\sin 60^0$ i $\cos 60^0$

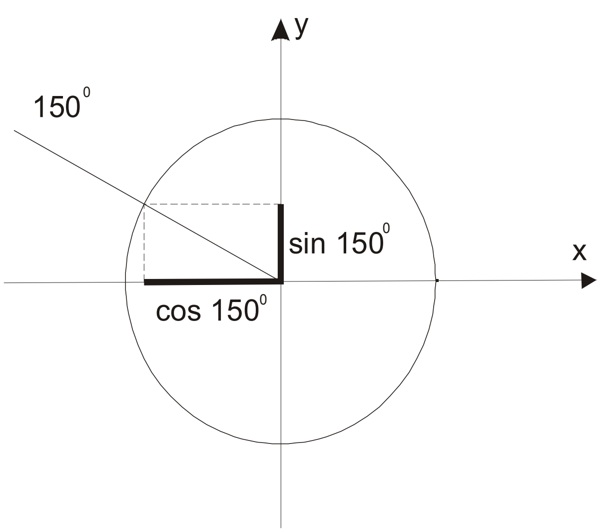


Kako ugao od 60^0 nije sredina kvadranta, to će vrednosti za $\sin 60^0$ i $\cos 60^0$ biti $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i to obe pozitivne.Pošto je crta za $\sin 60^0$ **duža**, ona mora biti $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (jer je veći broj) a $\cos 60^0$ je $\frac{1}{2}$ jer je crta tu kraća.

Dakle: $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

Primer 2.

Nađi $\sin 150^0$ i $\cos 150^0$

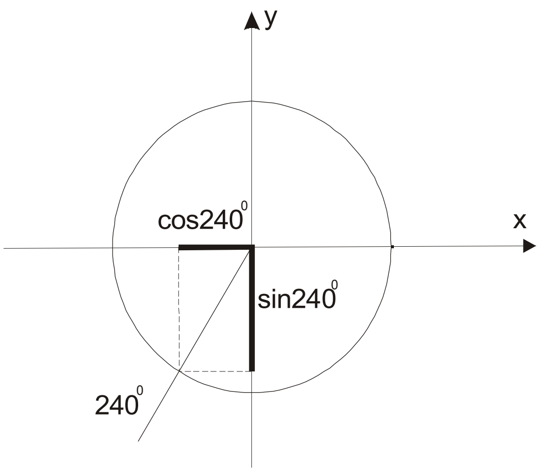


Crta za $\sin 150^0$ je kraća i pozitivna a crta za $\cos 150^0$ je duža i negativna, pa je : $\sin 150^0 = \frac{1}{2}$ a $\cos 150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Primer 3.

Nađi $\sin\frac{4\pi}{3}$ i $\cos\frac{4\pi}{3}$.

Ako date uglove u radijanima prebacimo u stepene, dobijamo da je to $\frac{4\pi}{3} = 240^0$

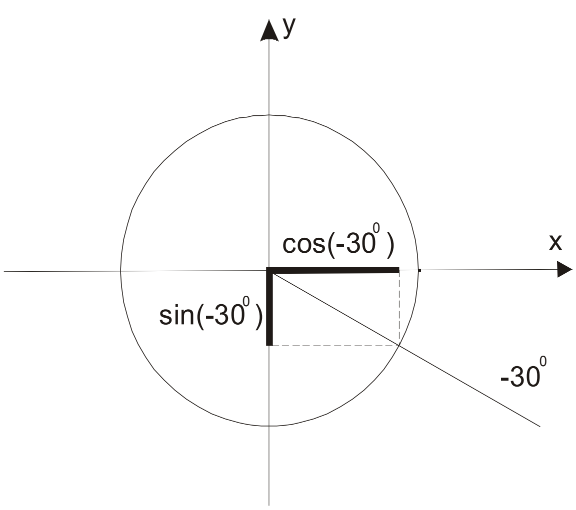


Znači, radi se o uglu u trećem kvadrantu i nije sredina kvadranta. Primetićemo da su obe vrednosti negativne, sinus je duži a kosinus kraći. Zaključujemo: $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Primer 4.

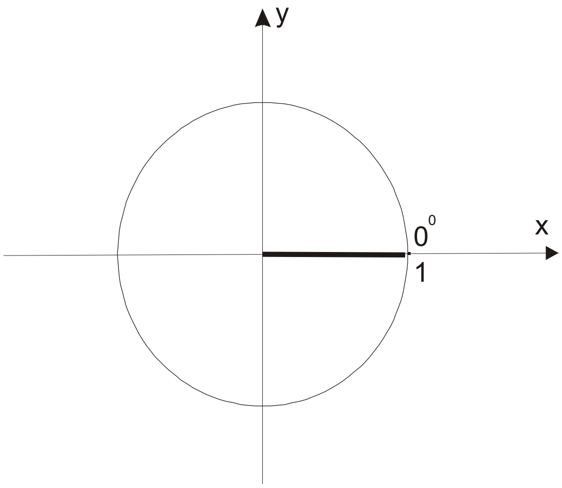
Nađi $\sin(-30^0)$ i $\cos(-30^0)$

Ovaj ugao, pošto je negativan ide u smeru kazaljke na satu. U pozitivnom smeru to bi bio ugao od 330^0.

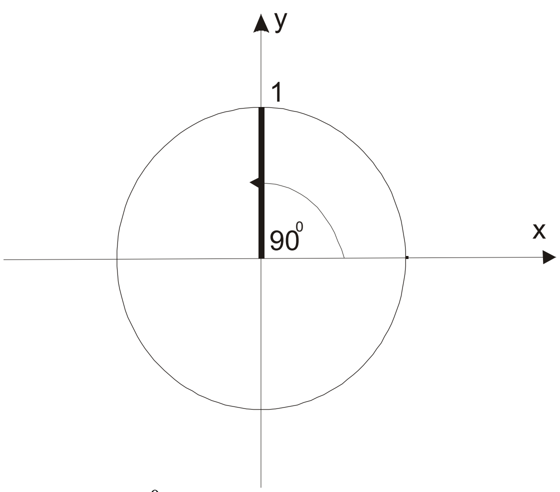


$\sin(-30^0) = \sin 330^0 = -\frac{1}{2}$ i $\cos(-30^0) = \cos 330^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

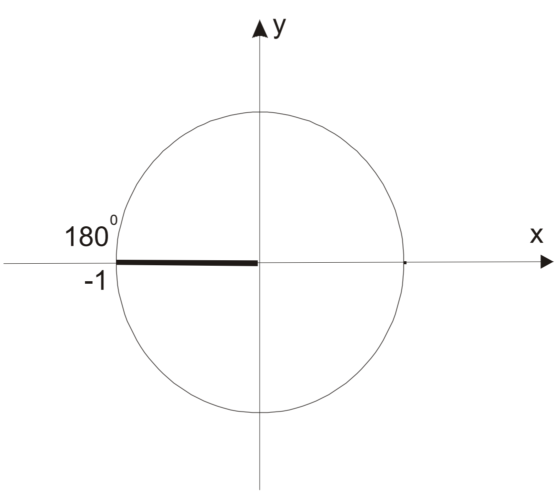
Da pogledamo šta je sa uglovima od $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ (granični uglovi)



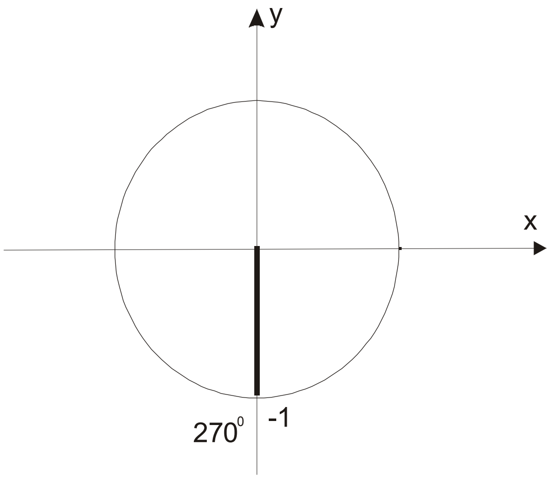
Kraci ovog ugla se poklapaju , x-osu seku do jedinice, a y-osu nigde, zato je **$\cos 0^0 = 1$** (cela crta) a **$\sin 0^0 = 0$** (nema crte)



Ugao od 90^0 seče y- osu po celoj crti a x- osu nigde. Pa je **$\sin 90^0 = 1$** a **$\cos 90^0 = 0$**



$\sin 180^0 = 0$ **$\cos 180^0 = -1$**



sin270^0=-1   cos 270^0=0

Tangens i kontangens proizvoljnog ugla

Već smo se ranije upoznali sa formulama $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, naravno pod uslovima da su imenioci različiti od nule.

Možemo zaključiti da je **tg**α definisan za $\cos\alpha \neq 0$,odnosno za $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+\mathbf{k}\pi$, $\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{Z}$

A ctgα za $\sin\alpha \neq 0$, odnosno za $\alpha \neq \mathbf{k}\pi$, $\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{Z}$

To znači da ako znamo da nađemo $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, znamo $\mathrm{tg}\alpha$ i $\mathrm{ctg}\alpha$

Primer 1.

Nađi:

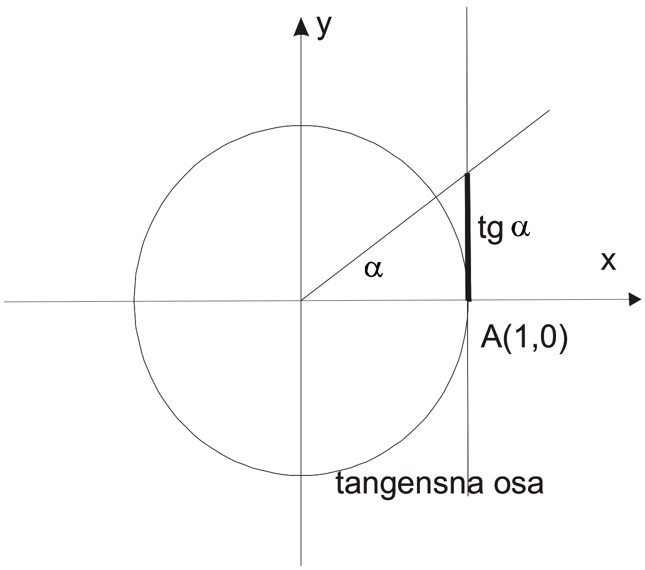
a) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}$
b) ctg 300^0

a) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{tg}\ 45^0 = \dfrac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

b) $\mathrm{ctg}\ 300^0 = \dfrac{\cos 300^0}{\sin 300^0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

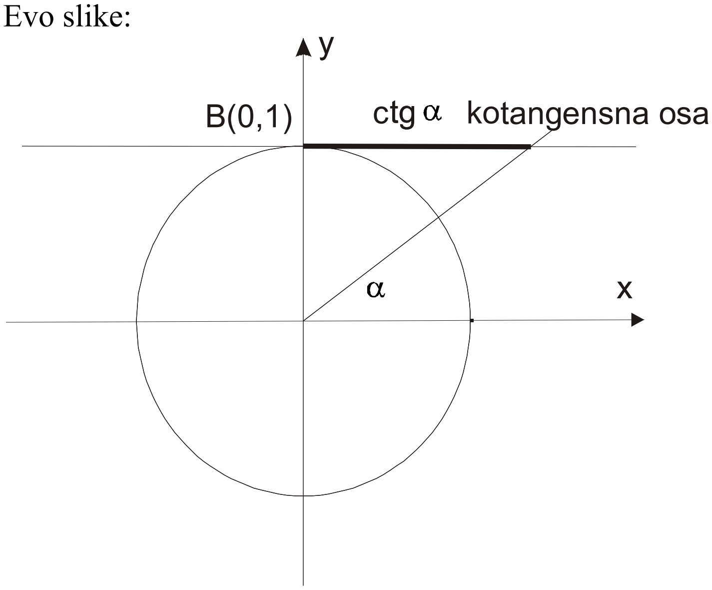
Naučimo sada gde se čitaju tangensi i kotangensi na trigonometrijskom krugu.

Uočimo pravu x = 1 . Ona očigledno prolazi kroz tačku A(1,0) i paralelna je sa y- osom.Jedan krak datog ugla α opet poklopimo sa x- osom a drugi krak će seći ovu pravu x = 1 koju ćemo zvati **TANGENSNA osa** . Odsečak na tangensnoj osi je ustvari vrednost za tgα . Evo to na slici:



Uočimo sada pravu y=1 koja prolazi kroz tačku B(0,1) i paralelna je x- osi. Tu pravu ćemo zvati **KOTANGENSNA osa** i na njoj ćemo očitavati vrednost za kotangense uglova.

Evo slike:



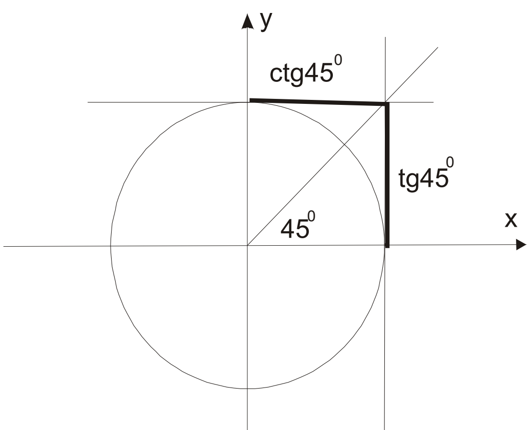
Ovde razmišljamo slično kao za sinuse i cosinuse, samo **moramo da zapamtimo nova tri broja :**

$$\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad 1, \qquad \sqrt{3}$$

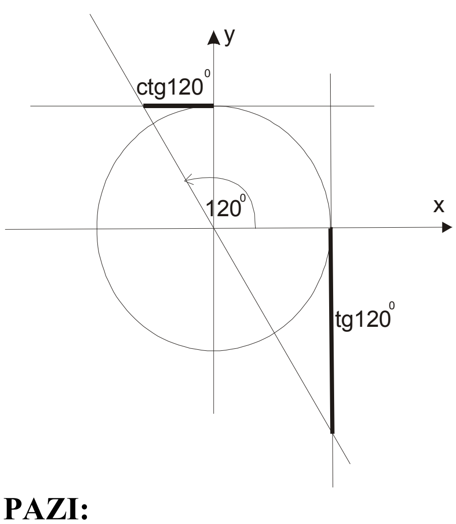
Broj 1, pozitivan ili negativan je vrednost za tangense i kotangense uglova koji su sredine kvadranata, tj. za 45, 135, 225 i 315 stepeni a za ostale uglove gledamo dužinu CRTA koje odsecaju na tangensnoj i kotangesnoj osi i da li je pozitivna ili negativna.

Veća crta je $\sqrt{3}$, a manja je $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Evo nekoliko primera:

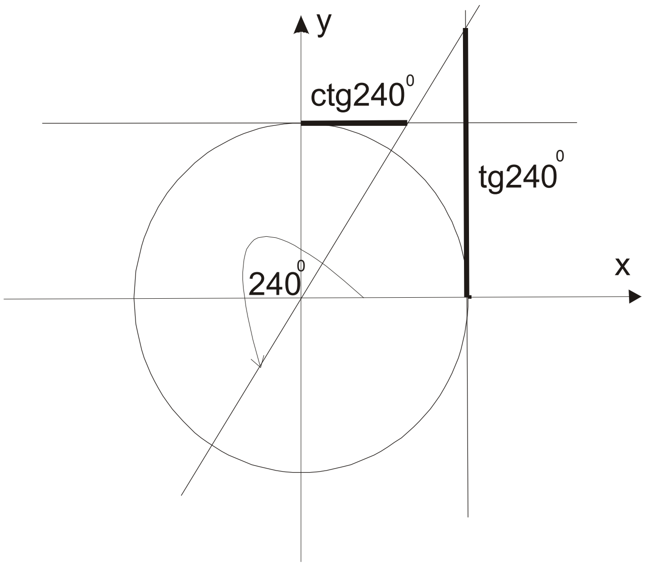


$tg45^0=1$ i $ctg45^0=1$ Sredina kvadranta je u pitanju, pa su vrednosti 1.



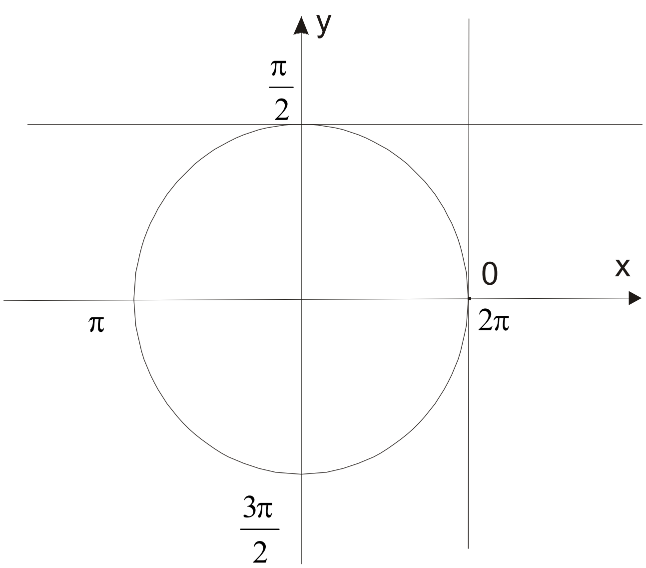
PAZI:
Pošto krak ugla ne seče tangensnu osu, moramo ga produžiti do preseka sa osom.
Uočimo da su obe vrednosti negativne i da je tangens duži a kotangens kraći!

Dakle : $tg\ 120^0= -\sqrt{3}$ i $ctg\ 120^0= -\frac{\sqrt{3}}{3}$



tg240^0= $\sqrt{3}$ i ctg 240^0=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (uoči dužine ovih podebljanih crta)

Šta je sa graničnim uglovima?

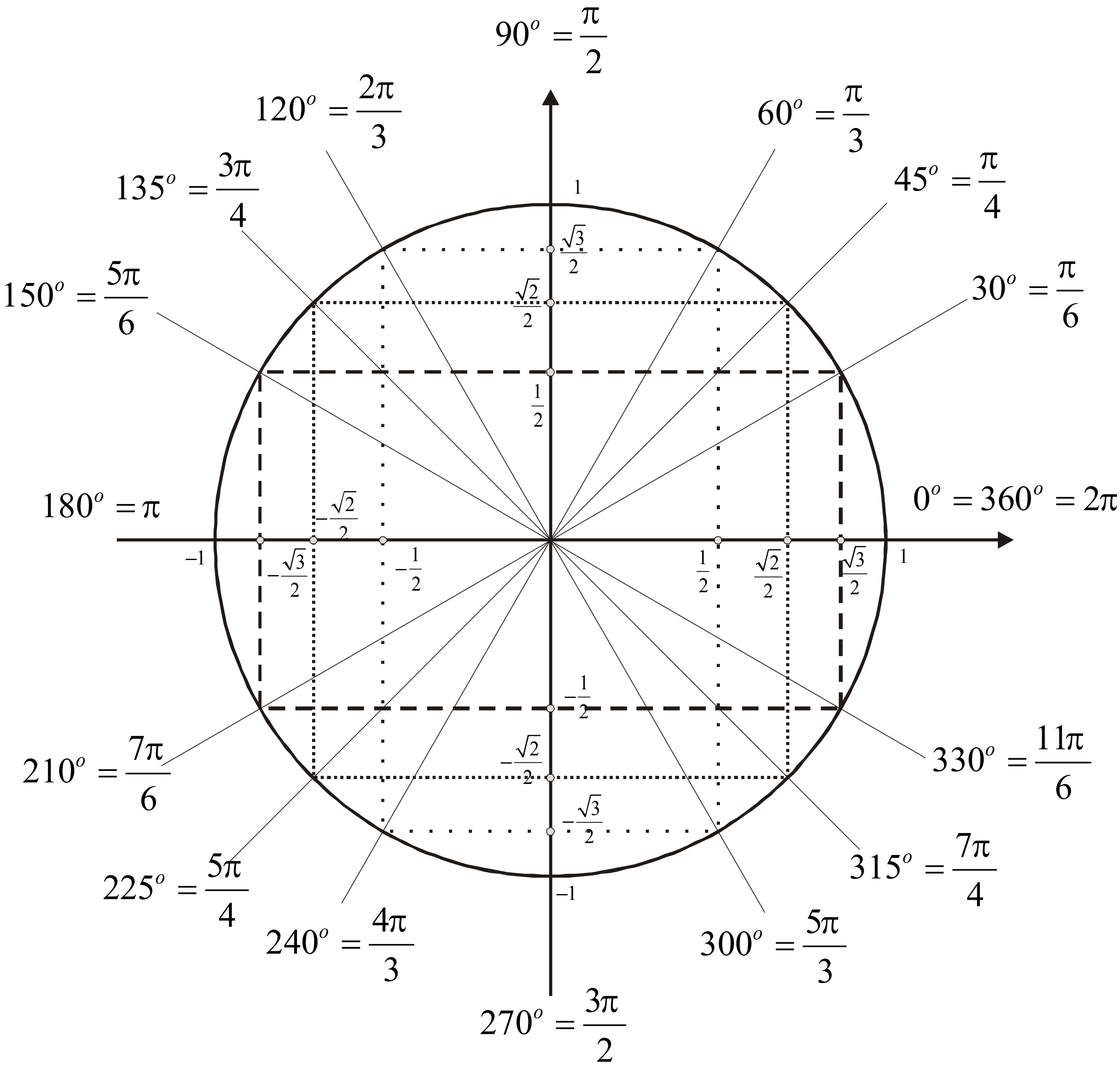


Za 0 stepeni vidimo da ugao ne seče nigde tangensnu osu , pa je tg0^0=0, za ctg0^0 krak i kotangensna osa idu paralelno, pa kažemo da ctg x teži beskonačnosti kad x teži nuli u pozitivnom smeru.

Slično je za ugao od 180^0. Opet je tangens nula a kotangens teži $-\infty$.

Za ugao od 90^0 je obrnuta situacija: ctg90^0=0 a tg90^0 teži $+\infty$.

Za ugao od 270^0 je ctg270^0=0 a tg270^0 teži $-\infty$.



90° = π/2
120° = 2π/3
60° = π/3
135° = 3π/4
45° = π/4
150° = 5π/6
30° = π/6
180° = π
0° = 360° = 2π
210° = 7π/6
330° = 11π/6
225° = 5π/4
315° = 7π/4
240° = 4π/3
300° = 5π/3
270° = 3π/2
1
−1
1/2
√2/2
√3/2
−1/2
−√2/2
−√3/2

SVODJENJE NA I KVADRAT

Kao što smo videli do sada, trigonometrijske funkcije uglova **I kvadranta** izračunavaju se na isti način kao trigonometrijske funkcije oštrih uglova pravouglog trougla. Pokazaćemo da se preko formula, trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla mogu izraziti preko trigonometrijskih funkcija odgovarajućeg ugla **I kvadranta**. Taj postupak se zove ***svodjenje na I kvadrat.***

1) Iz II u I kvadrant

Važe formule za: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ odnosno $\boxed{\sin\left(90^0+\alpha\right)=\cos\alpha}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ odnosno $\boxed{\cos\left(90^0+\alpha\right)=-\sin\alpha}$

$tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$ odnosno $\boxed{tg\left(90^0+\alpha\right)=-ctg\alpha}$

$ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$ odnosno $\boxed{ctg\left(90^0+\alpha\right)=-tg\alpha}$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$$
$$ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha$$

odnosno :

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha\\&tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha\\&ctg(180^0-\alpha)=-ctg\alpha\end{aligned}}$$

Primeri:

a) $\sin 115^o=\sin(90^o+25^o)=\cos 25^o$ a može i:

$\sin 115^o=\sin(180^o-65^o)=\sin 65^o$

Naravno, već smo videli "veze'' u **I kvadrantu** i znamo da je $\cos 25^o=\sin 65^o$. Tako da možete upotrebiti bilo koju formulu iz ove dve grupe.

b) $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

v) $tg141^o=tg\left(180^o-39^o\right)=-tg39^o$

g) $ctg101^o=ctg\left(90^o+11^o\right)=-tg11^o$

2) iz III u I kvadrant

Opet imamo **dve** grupe formula:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$$
$$ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha$$

to jest:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha\\ tg(180^0+\alpha)=tg\alpha\\ ctg(180^0+\alpha)=ctg\alpha\end{array}}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \quad \text{tj.} \quad \boxed{\sin\left(270^0-\alpha\right)=-\cos\alpha}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \quad \text{tj.} \quad \boxed{\cos\left(270^0-\alpha\right)=-\sin\alpha}$$
$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha \quad \text{tj.} \quad \boxed{tg\left(270^0-\alpha\right)=ctg\alpha}$$
$$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha \quad \text{tj} \quad \boxed{ctg\left(270^0-\alpha\right)=tg\alpha}$$

<u>Primeri:</u>

a) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 207^o=\cos\left(180^o+27^o\right)=-\cos 27^o$

v) $tg263^o=tg\left(270^o-7^o\right)=ctg7^o$

g) $ctg\frac{7\pi}{6}=ctg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

3) <u>Iz IV u I kvadrant</u>

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \quad \text{tj.} \quad \sin\left(270^0+\alpha\right)=-\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \quad \text{tj.} \quad \cos\left(270^0+\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha \quad \text{tj.} \quad tg\left(270^0+\alpha\right)=-ctg\alpha$$
$$ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha \quad \text{tj.} \quad ctg\left(270^0+\alpha\right)=-tg\alpha$$

Ako posmatramo negativan ugao $(-\alpha)$:

sin(-α) = - sinα cos(-α) = cosα tg(-α) = tgα ctg(-α) = -ctg α

Ovo nam govori da je jedino $\cos\alpha$ parna funkcija (jer "uništava'' minus a sve ostale su neparne)

<u>Primeri:</u>

a) $\sin 307^o=\sin\left(270^o+37^o\right)=-\cos 37^o$

b) $\cos(-30^o) = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

v) $tg\dfrac{11\pi}{6} = tg\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -tg\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) $ctg\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -ctg\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Što se tiče periodičnosti funkcija $\sin x$ i $\cos x$ već smo uočili da važi:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \text{odnosno} \quad \sin(\alpha + 360^0 \cdot k) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \text{odnosno} \quad \cos(\alpha + 360^0 \cdot k) = \cos\alpha$$

za ***k*** koji je **bilo koji ceo broj**.

Dakle: **osnovni period finkcija** $\sin x$ **i** $\cos x$ **je** $T = 2\pi$ **odnosno** $T = 360^o$

<u>Primeri:</u>

a) $\sin 1170^o =$ (oduzmimo od 1170^o po 360^o dok se ne dodje '"ispod'' 360^o)

$$1170^o - 360^o = 810^o$$
$$810 - 360^o = 450^o$$
$$450^o - 360 = 90^o$$

Pa je: $\sin 1170^o = \sin 90^o = 1$ ili možemo zapisati: $\sin 1170^o = \sin(90^o + 3\cdot 2\pi) = \sin 90^o$

b) $\cos 780^o =$ (sličan postupak)

$$780^o - 360^o = 420^o$$
$$420^o - 360^o = 60^o$$

Pa je $\cos 780^o = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$ tj. $\cos 780^o = \cos(60^o + 360^o) = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$

Za tangense i kotangense važi:

$tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$ odnosno $tg(\alpha + k \cdot 180^0) = tg\alpha$

$ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha$ odnosno $ctg(\alpha + k \cdot 180^0) = ctg\alpha$

Dakle: **osnovni period funkcija** tgx **i** $ctgx$ **je** $T = \pi$ **odnosno** $T = 180^o$

Primeri:

a) $tg750^o =$(odavde od 750^o oduzmemo po 180^o dok se ne " spustimo'' ispod 180^o)

$$750^o - 180^o = 570^o$$
$$570^o - 180^o = 390$$
$$390^o - 180^o = 210^o$$
$$210^o - 180^o = 30^o$$
$$tg750^o = tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) $ctg\left(-1110^o\right) = -ctg1110^o = -ctg30^o = -\sqrt{3}$ jer je $1110^o = 6 \cdot 180^o + 30^o$

1) Uprostiti izraz: $\dfrac{\sin 750^o \cdot \cos 390^o \cdot tg1140^o}{ctg405^o \cdot \sin 1860^o \cdot \cos 780^o}$

Rešenja: Najpre ćemo upotrebom formula sve prebaciti u **I kvadrant**!

$$\sin 750^o = \sin(30^o + 2 \cdot 360^o) = \sin 30^o = \frac{1}{2}$$
$$\cos 390^o = \cos(30^o + 360^o) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg1140^o = tg(60^o + 6 \cdot 180^o) = tg60^o = \sqrt{3}$$

$$ctg405^o = ctg(45^o + 2 \cdot 180^o) = ctg45^o = 1$$
$$\sin 1860^o = \sin(60^o + 5 \cdot 360^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 780^o = \cos(60^o + 2 \cdot 360^o) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

Vratimo ova rešenja u početni zadatak:

$$\frac{\sin 750^o \cdot \cos 390^o \cdot tg1140^o}{ctg405^o \cdot \sin 1860^o \cdot \cos 780^o} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$$

ADICIONE FORMULE

Zbir uglova

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

Razlika uglova

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE DVOSTRUKOG UGLA

Formule su:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3. $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

Primeri:

1) a) $\sin 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ **Dokazati.**

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$ (uvek možemo u imenioci dopisati 1, zar ne?)=

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} =$ (trik: izvučemo zajednički i gore i dole $\cos^2\alpha$)=

$$\frac{\cancel{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cancel{\cos^2\alpha}\cdot\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)} = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

b) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ **Dokazati.**

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1} = \dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} =$ (isti trik, izvučemo $\cos^2\alpha$ i gore i dole)

$$= \frac{\cos^2\alpha\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^2\alpha\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)} = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha},$$ što je i trebalo dokazati.

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE POLUUGLOVA

Formule su:

1. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ ili $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$
2. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ ili $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$
3. $tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
4. $ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

Primer:

1) Odrediti $\cos\frac{\alpha}{2}$**, ako je** $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ **i** $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$

Pošto je $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ moramo naći $\cos\alpha$.

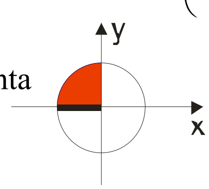
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{racionališemo}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Pošto je $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$

iz $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

To nam govori da je iz II kvadranta



$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

Transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod i obrnuto

Formule su:

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5. $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
6. $ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

7. $\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
8. $\cos x\cdot\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$
9. $\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
10. $\sin x\cdot\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

Osnovne trigonometrijske jednačine

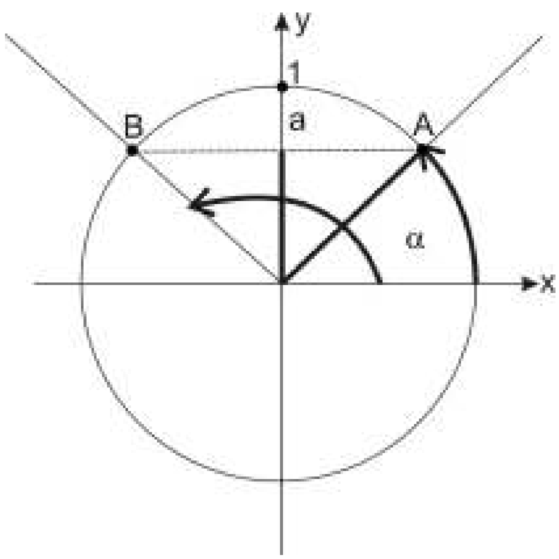
1. sinx = a

Ova jednačina ima rešenja ako je $-1 \le a \le 1$ zbog ograničenosti sinusne funkcije izmedju -1 i 1.
Da bi lakše razumeli kako se rešavaju ove jednačine, posmatraćemo sledeće situacije:

i) $0 < a < 1$
ii) $-1 < a < 0$
iii) $a = 0$
iv) $a = 1$
v) $a = -1$

i) $\sin x = a \quad 0 < a < 1$

<u>Postupak:</u> Nadjemo vrednost ***a*** na y-osi i povučemo pravu $y = a$ Ona seče trigonometrijski krug (tačke A i B) i spojimo sa kordinatnim početkom. Dobili smo dva tražena ugla: (α) i $(\pi - \alpha)$. Evo slike:



Rešenja zapisujemo:

$$x_1 = \alpha + 2k\pi$$
$$x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi$$
$$k \in z$$

<u>PAZI:</u>

$2k\pi$ dodajemo zbog periodičnosti funkcije $\sin x$, koja je $2\pi = 360^0$, to je obavezno!

Primer:

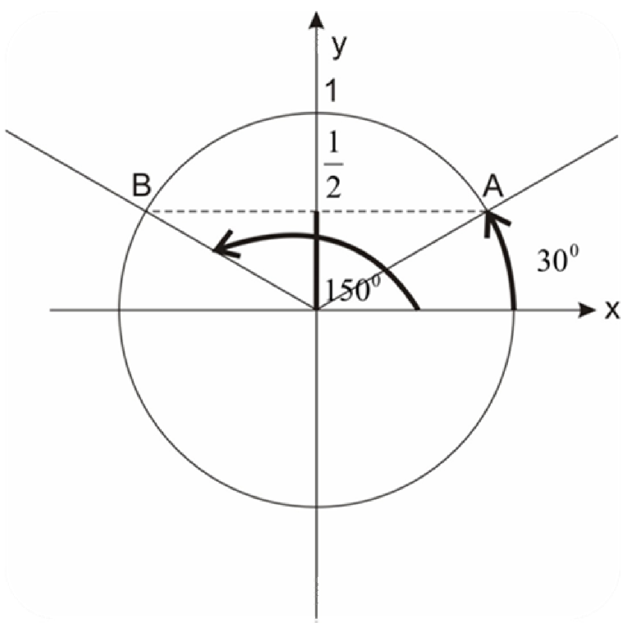
Rešiti jednačinu: $\sin x = \frac{1}{2}$

Rešenje: Prvo nacrtamo trigonometrijski krug. Nadjemo na *y*-osi vrednost $\frac{1}{2}$ i povučemo pravu $y = \frac{1}{2}$, paralelnu sa *x*-osom. Ta prava seče trigonometrijski krug u tačkama A i B. Te tačke spajamo sa koordinatnim početkom i dobili smo tražene uglove.

Iz **tablice** (ko zna) vidimo da su traženi uglovi:

$$\alpha_1 = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$
$$\alpha_2 = 150^0 = \frac{5\pi}{6}$$

Evo slike:



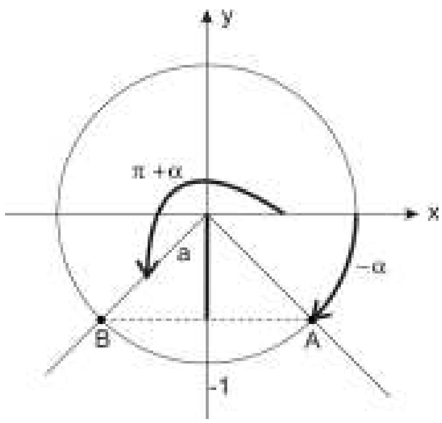
Rešenja su:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in z$$

ii) $\sin x = a \qquad -1 < a < 0$

Postupak je sličan kao malopre. Nadjemo vrednost a na y-osi (**pazi**: sad je a negativno pa je ispod x-ose), povučemo pravu paralelnu sa x-osom. Mesta gde prava y=a seče trigonometrijski krug (A i B) spojimo sa koordinatnim početkom i dobili smo tražene uglove: $(-\alpha)$ i $(\pi + \alpha)$

Na slici to izgleda:

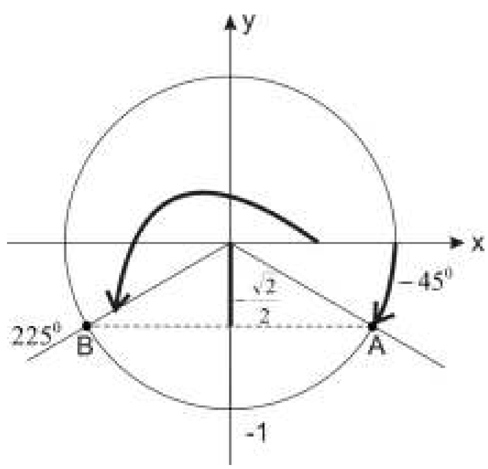


Rešenja su:

$$x_1 = -\alpha + 2k\pi$$
$$x_2 = (\pi + \alpha) + 2k\pi$$
$$k \in z$$

<u>Primer:</u>

Reši jednačinu: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



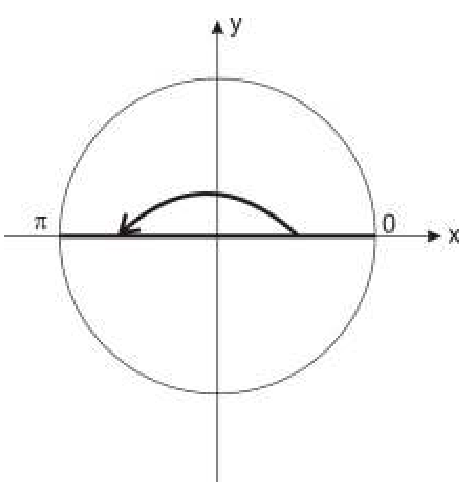
$$-45^0 = -\frac{\pi}{4}$$
$$225^0 = \frac{5\pi}{4}$$

<u>Rešenja su:</u>

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

Naravno, ovo negativno rešenje $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ možemo napisati i kao $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ ali je običaj da se uglovi u IV kvadrantu pišu kao negativni

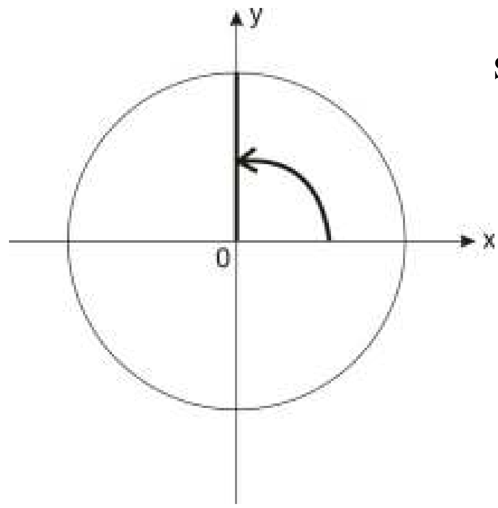
iii) $\sin x = 0$



Sinusi su jednaki nuli za uglove od 0^0 **i** 180^0

$$x = 0 + 2k\pi$$
$$x = \pi + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

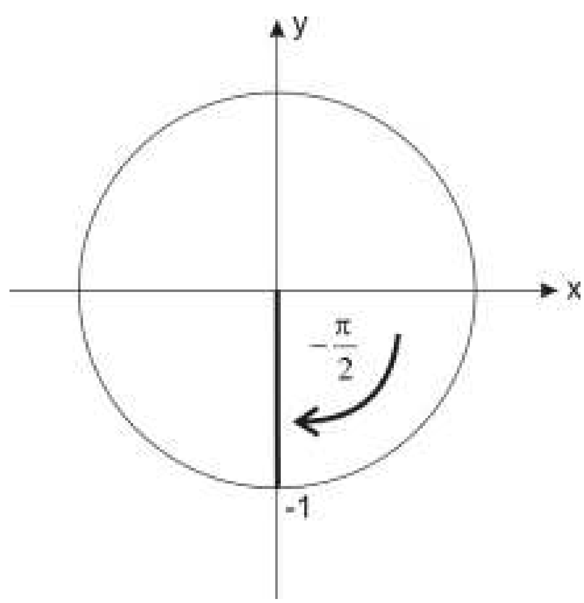
iv) $\sin x = 1$



Sinus ima vrednost 1 za ugao od 90^0

Ovde imamo samo jedno rešenje: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$

v) $\sin x = -1$



$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$

Ili možemo zapisati preko pozitivnog ugla:

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$

2. $\cos x = b$

Kao i kod $\sin x = a$ i ovde mora biti $-1 \le b \le 1$ da bi jednačina imala rešenja.
I ovde ćemo rasčlaniti problem:

i) $0 < b < 1$
ii) $-1 < b < 0$
iii) $b = 0$
iv) $b = 1$
v) $b = -1$

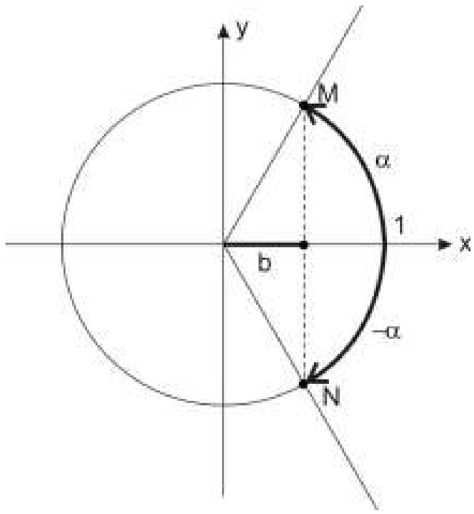
i) $\cos x = b \qquad 0 < b < 1$

Ovi uglovi se nalaze u I i IV kvadrantu.

Postupak:

Na x-osi nadjemo vrednost b. Povučemo pravu paralelnu sa y-osom. Ta prava seče

trigonometrijski krug u tačkama M i N. Spojimo te tačke sa koordinatnim početkom i dobili smo traženе uglove: α i $(-\alpha)$



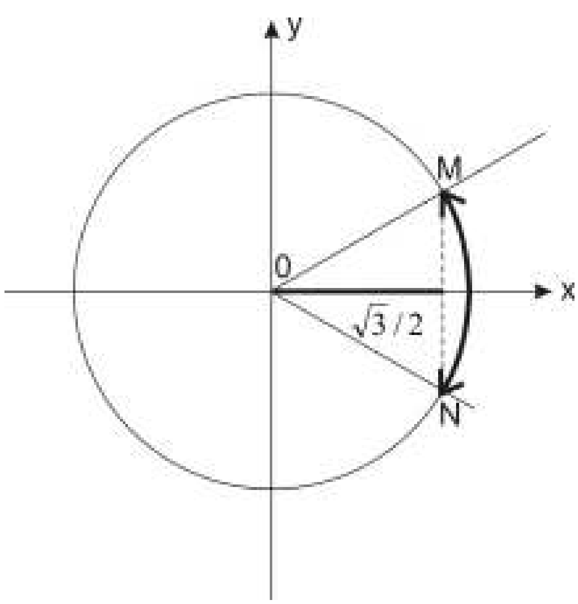
Rešenja su:

$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

Ugao α odredimo iz tablica ili konstruktivno.

Primer:

Reši jednačinu: $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Rešenja su:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z$$

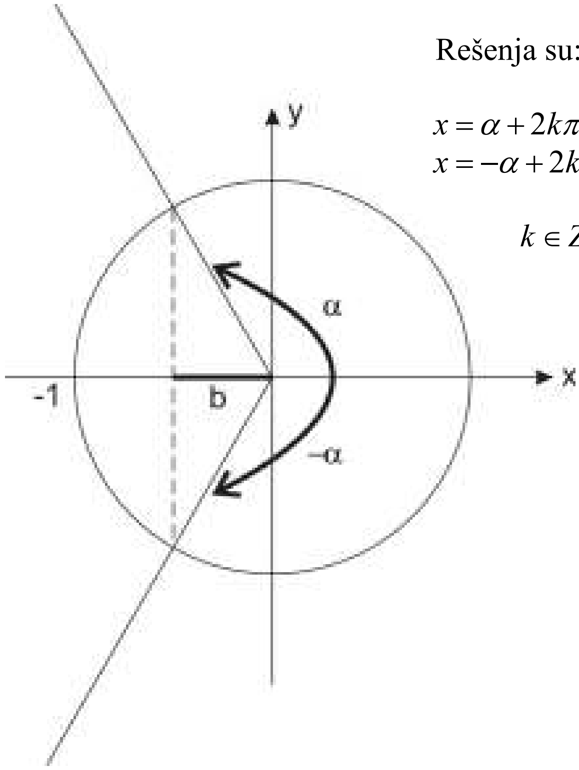
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z$$

Jer je $\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

To jest $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\cos x = b \quad -1 < b < 0$

Ovi uglovi se nalaze u II i III kvadrantu. Postupak je isti, samo je b negativno!



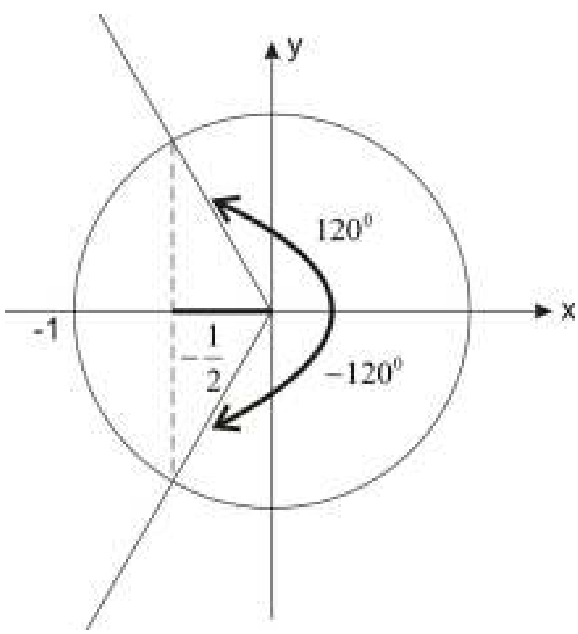
Rešenja su:

$x = \alpha + 2k\pi$
$x = -\alpha + 2k\pi$

$k \in Z$

Primer:

Reši jednačinu $\cos x = -\dfrac{1}{2}$



$120^0 = \dfrac{2\pi}{3}$

Rešenja su:

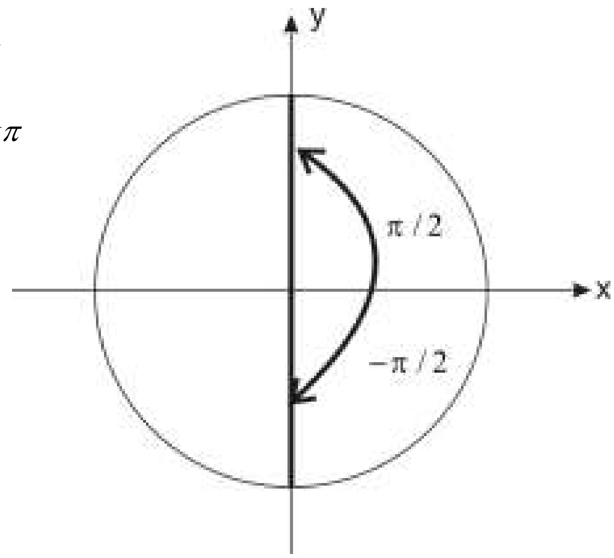
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

iii) $\cos x = 0$

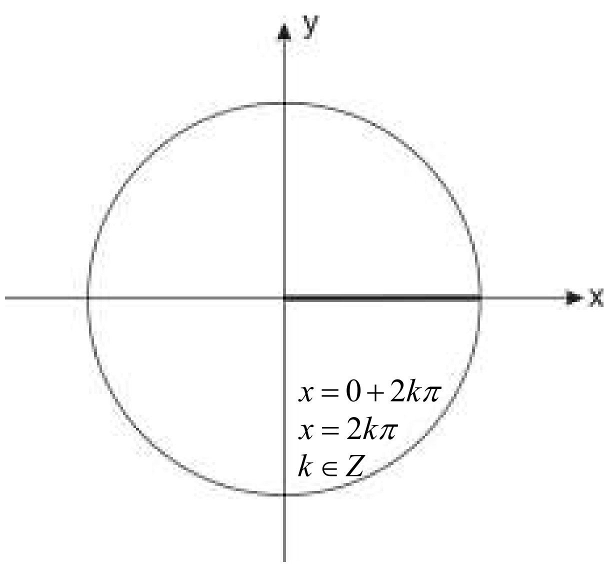
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in Z$



iv) $\cos x = 1$

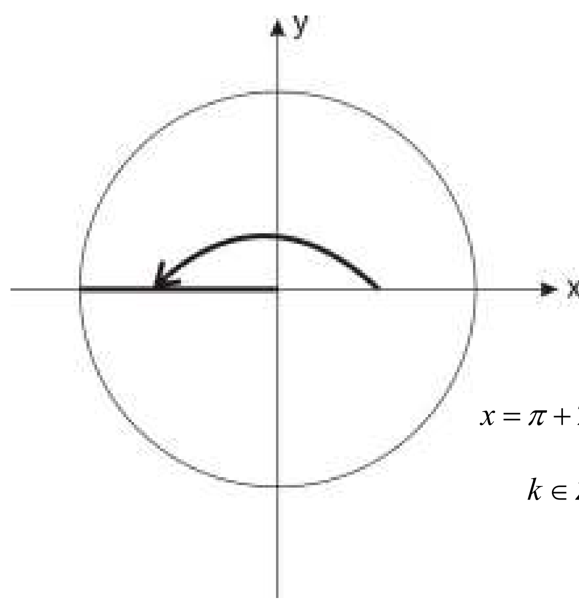


$x = 0 + 2k\pi$

$x = 2k\pi$

$k \in Z$

v) $\cos x = -1$



$x = \pi + 2k\pi$

$k \in Z$

3. $tgx = m$

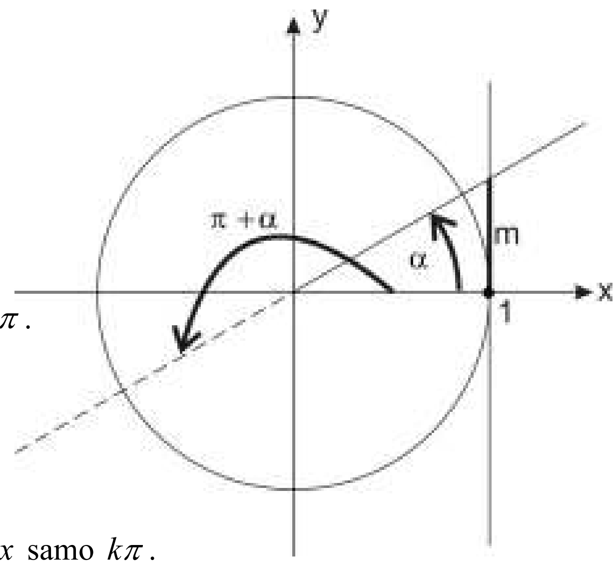
Za razliku od prethodne dve, jednačina $tgx = m$ ima rešenja za $\forall m \in (-\infty, \infty)$. Razmotrićemo dve situacije: $m > 0$ i $m < 0$

i) $tgx = m \quad m > 0$

To su uglovi u I i III kvadrantu!

Postupak: Na tangesnoj osi nadjemo m i to spojimo sa koordinatnim početkom. Dobili smo ugao α. Produžimo taj ugao u III kvadrant i evo drugog rešenja: $\pi+\alpha$

Rešenje je:



$x=\alpha+k\pi$
$k\in z$

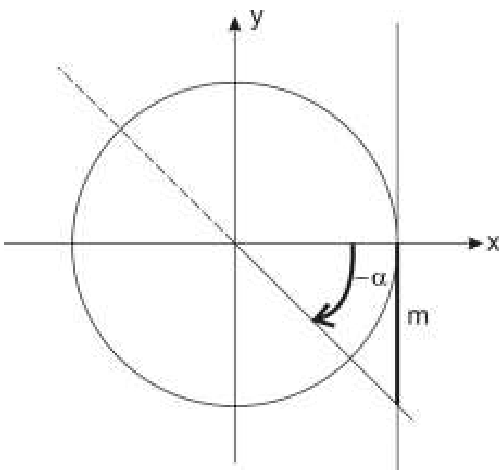
Zašto samo jedno rešenje?

Zato što je tgx kao i $ctgx$ periodična funkcija sa periodom π.
Pa kad stavimo $k\pi$ mi smo to rešenje već opisali!

Zapamti: Kod $\sin x$ i $\cos x$ je perioda $2k\pi$ a kod tgx i $ctgx$ samo $k\pi$.

ii) $tgx=m \quad m<0$

Ovi uglovi su u II I IV kvadrantu! Postupak je potpuno isti.



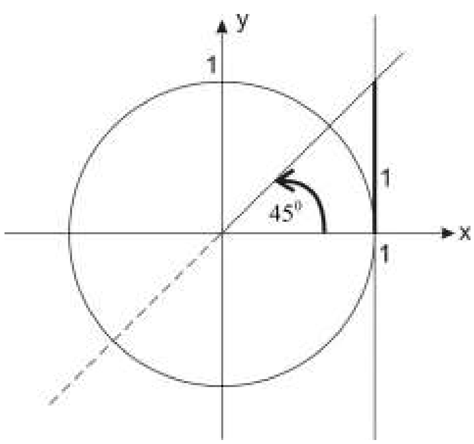
Rešenje:

$x=-\alpha+k\pi$
$k\in Z$

Primer 1.

Reši jednačinu: $tgx=1$

Rešenje: (iz tablice znamo: $tgx45^0=1$)



$45^0=\frac{\pi}{4}$

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

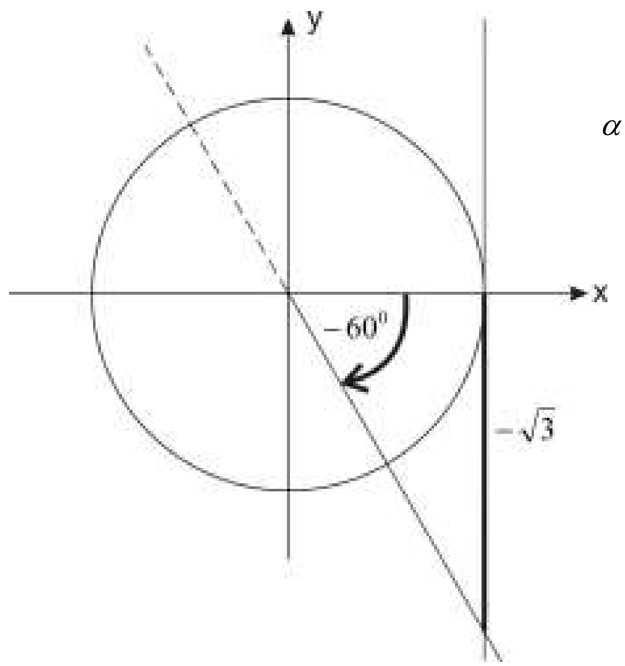
$k\in Z$

Primer 2.

Reši jednačinu: $tgx = -\sqrt{3}$

Rešenje: Iz tablice je $tg60^0 = +\sqrt{3}$, pa je onda $tg(-60^0) = -\sqrt{3}$ jer je $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

Crtamo sliku:



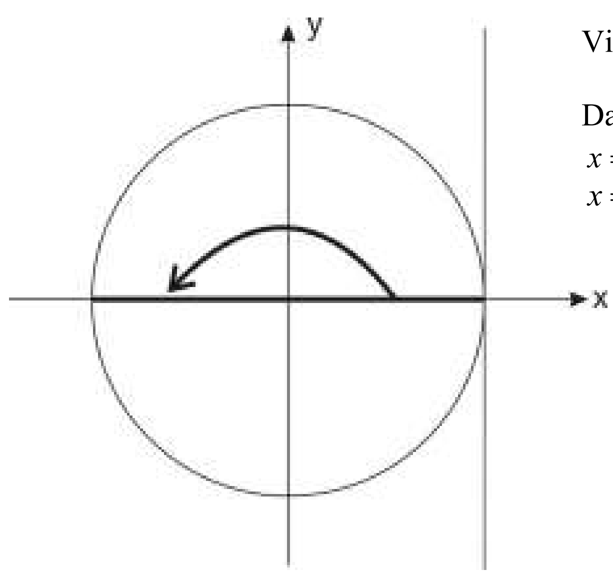
Dakle:

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer 3.

Reši jednačinu: $tgx = 0$



Vidimo da su to uglovi od 0^0 i 180^0

Dakle:

$x = 0^0 + k\pi$

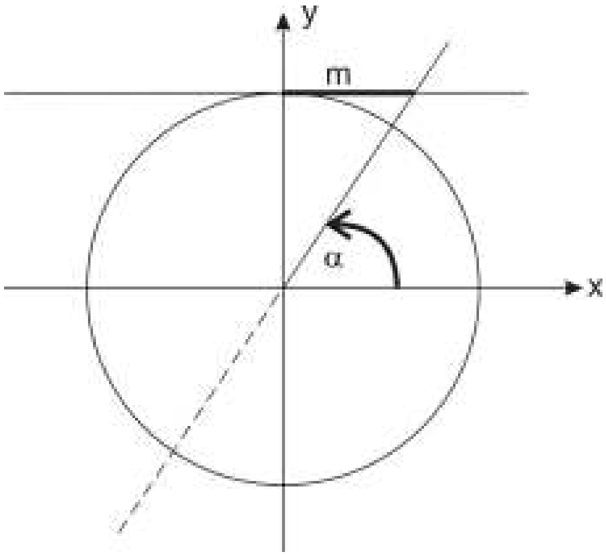
$x = k\pi$

$k \in Z$

4. $ctgx = m$

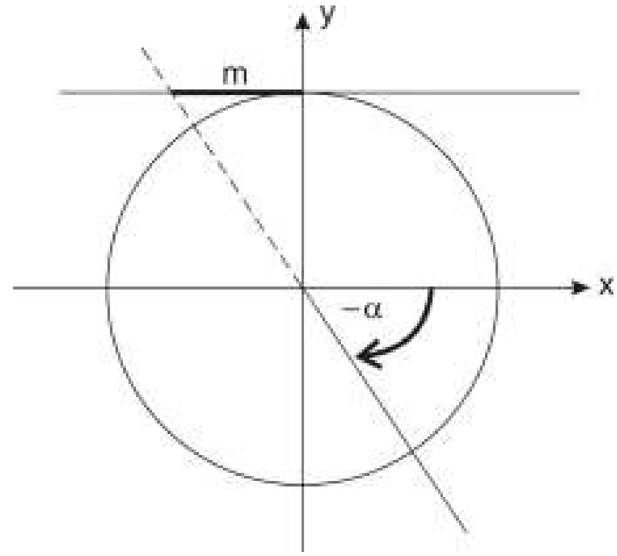
Kao i za tgx rešenja su iz celog skupa R. Perioda je $k\pi$. Postupak rešavanja je sličan, samo što vrednost za ctgx tražimo na kotangensnoj osi

$ctgx = m$ $\quad m > 0$



Uglovi su u I i III kvadrantu.
Rešenje: $x = \alpha + k\pi$
$k \in Z$

$ctgx = m$ $\quad m < 0$



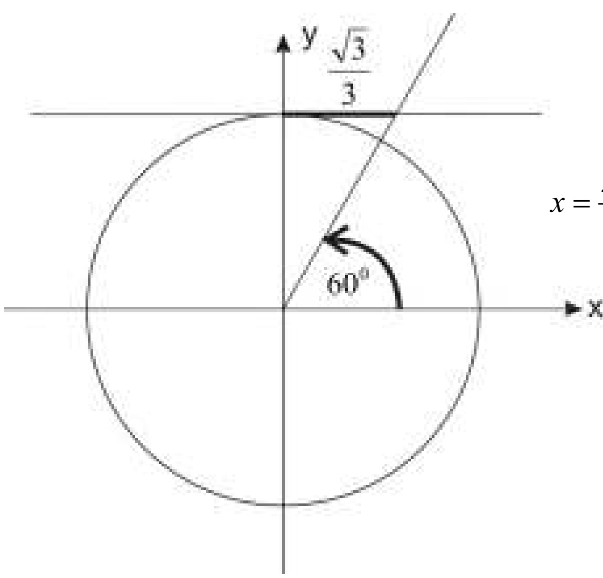
Uglovi su u II i IV kvadrantu.
Rešenje: $x = -\alpha + k\pi$
$k \in Z$

Najpre potražimo vrednost u tablici, vidimo koji je ugao u pitanju i nacrtamo sliku.

Primer 1.

Reši jednačinu: $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

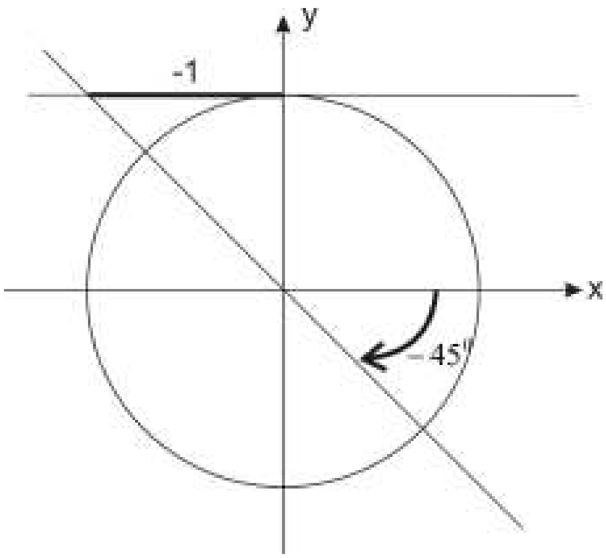
Rešenje: iz tablice vidimo vrednost za 60^0



$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z$

Primer2.

Reši jednačinu: $ctgx = -1$



$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

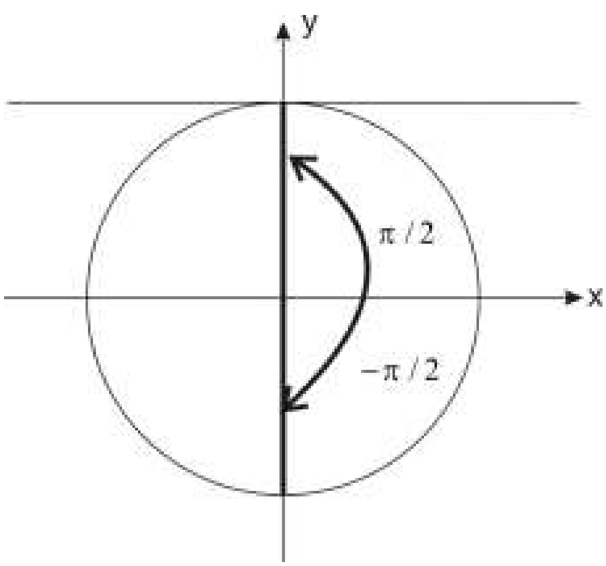
A može i:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer 3.

Rešiti jednačinu: $ctgx = 0$



$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Zadaci

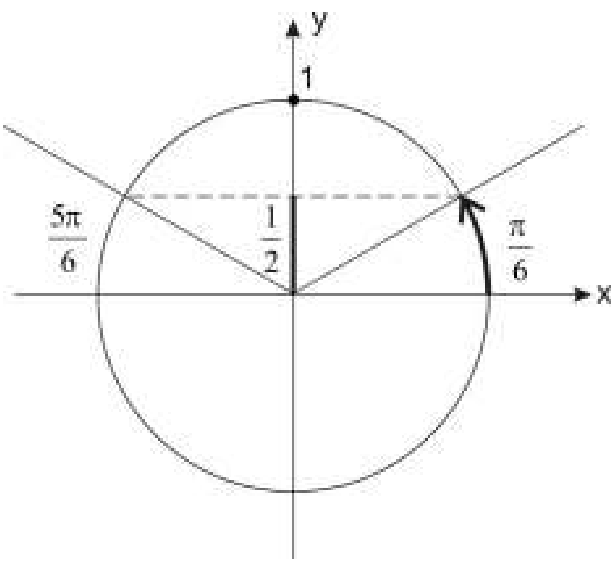
1) Reši jednačine:

a) $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$

b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

Rešenje:

a) Jednačinu rešavamo normalno , kao da je sinx.(al pišemo 2x u rešenju…)
Iz tablice vidimo da je jedan traženi ugao 30^0



Pazi sad:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Sada izrazimo *x,* odnosno sve podelimo sa 2

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

$$k \in Z$$

b) Isto rešavamo kao da je $\sin x = 0$ ali posle ne pišemo $x = ….$ Nego $x - \dfrac{\pi}{3} = ...$ pa izračunamo!

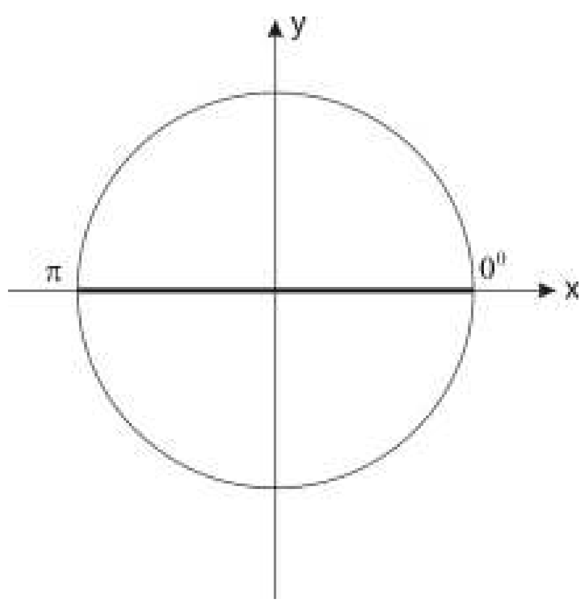
Dakle:

$$x - \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in Z \qquad\qquad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in Z$$

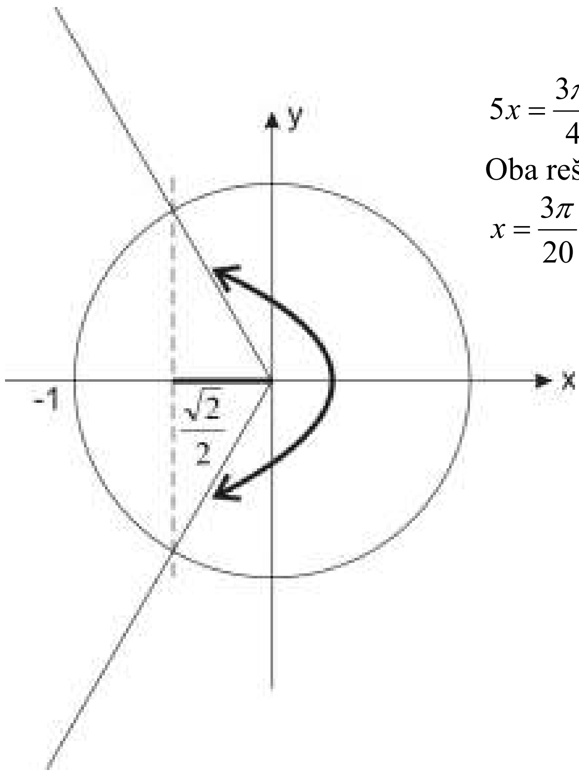


2) Reši jednačine:

a) $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Rešenje: $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$5x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ili $5x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

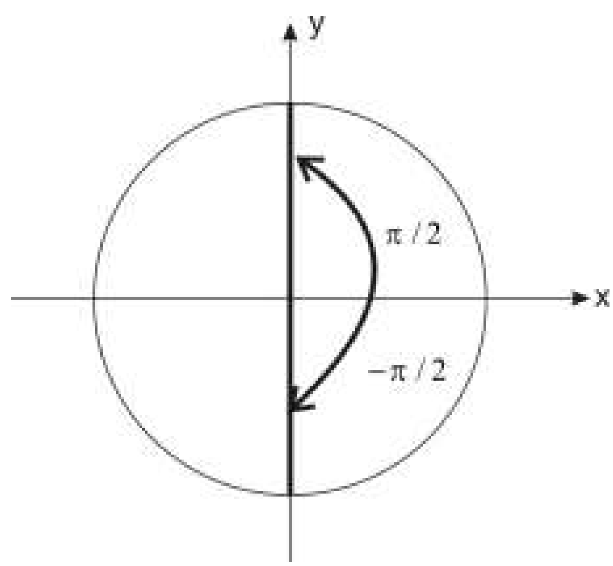
Oba rešenja podelimo sa 5

$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$ ili $x = -\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$

$k \in Z$ $k \in Z$

b)

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$



$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $2x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$2x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$ $2x = \frac{-2\pi}{6} + 2k\pi$

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

$k \in Z$ $k \in Z$

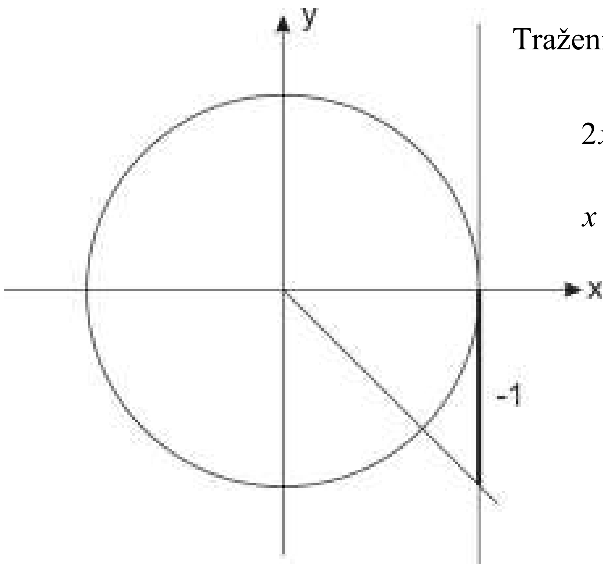
3) Rešiti jednačine:

a) $tg2x = -1$

b) $tg\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Rešenje:

a) $tg2x = -1$



Traženi ugao je -45^0

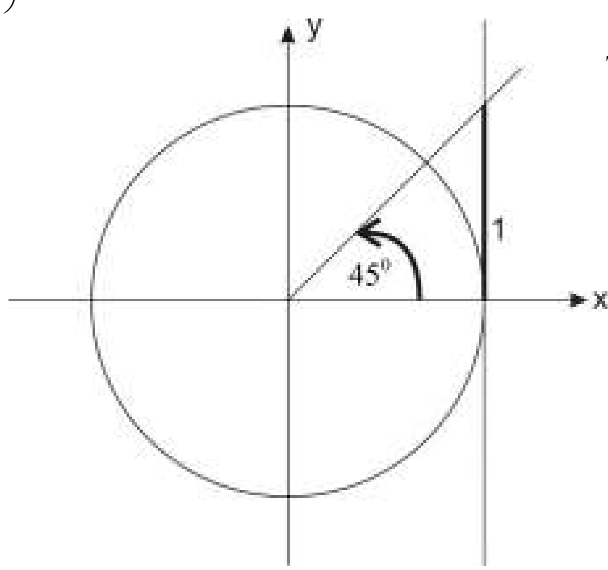
Dakle:

$$2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$k \in Z$$

b) $tg\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$



Traženi ugao (iz tablice) je $45^0 = \frac{\pi}{4}$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

$$k \in Z$$

4) Rešiti jednačine:

a) $ctg3x = 1$

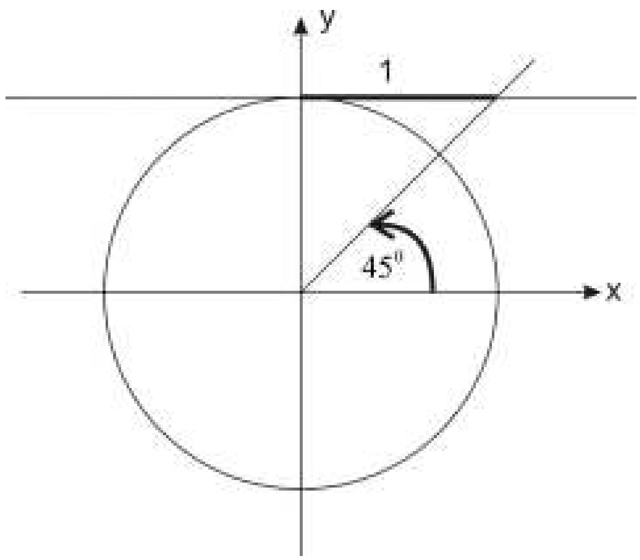
b) $ctg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

Rešenje:

a) $ctg3x = 1$ Iz tablice vidimo da je traženi ugao 45^0

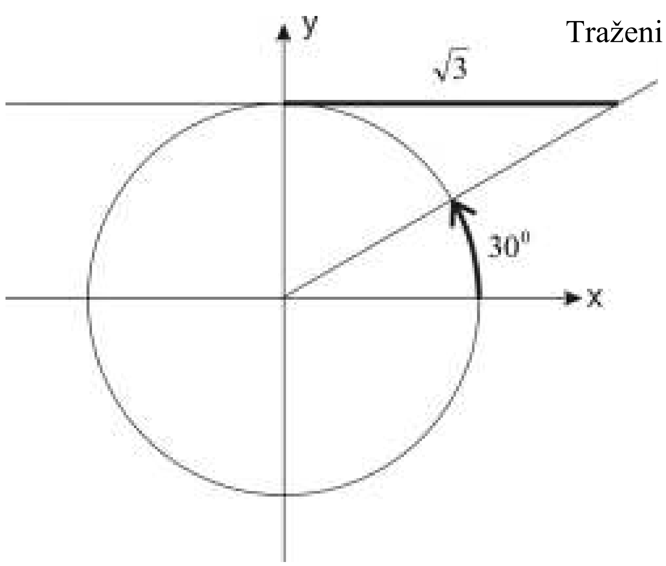
Dakle:

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$
$$k \in Z$$



b) $ctg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

Traženi ugao je 30^0



$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x = \frac{4\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$
$$k \in Z$$

Trigonometrijske nejednačine

To su nejednačine kod kojih se nepoznata javlja kao argument trigonometrijske funkcije.

Rešiti trigonometrijsku nejednačinu znači naći sve uglove koji je zadovoljavaju.

Prilikom traženja rešenja ove nejednačine, najpre ćemo rešiti odgovarajuću jednačinu, a zatim naći intervale koji se u nejednačini traže.

1. Nejednačine sinx>a i sinx<a

$\boxed{\sin x > a}$

$a < -1$ **-svaki broj je rešenje**

$-1 \leq a \leq 1$ **- rešavamo**

$a \geq 1$ **-nema rešenja**

$\boxed{\sin x < a}$

$a \leq -1$ **-nema rešenja**

$-1 \leq a \leq 1$ **-rešavamo**

$a > 1$ **-svaki broj je rešenje**

Primer 1. **Reši nejednačine:**

a) $\sin x > -2$

b) $\sin x > \frac{1}{2}$

v) $\sin x > 3$

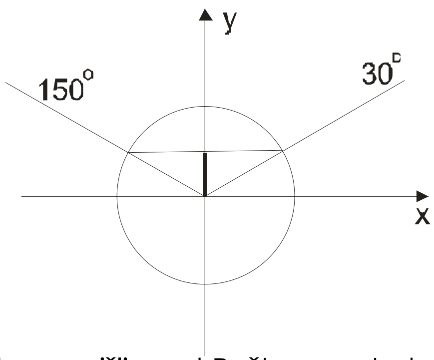
Rešenja:

a) $\sin x > -2$ pošto je $-1 \leq \sin x \leq 1$ to je svaki $x \in R$ rešenje.

b) $\sin x > \frac{1}{2}$

Najpre rešimo odgovarajuću jednačinu:

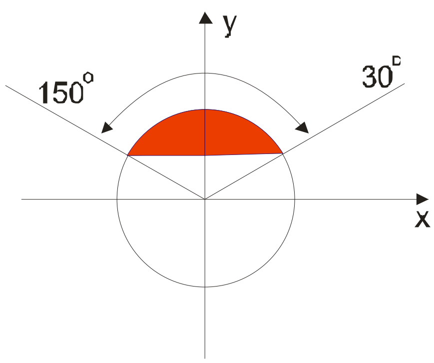
$\sin x = \frac{1}{2}$



Dakle, rešenja jednačine su:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Sada razmišljamo! Pošto nam treba da je $\sin x > \frac{1}{2}$ uzimamo "gornji deo".



Dakle:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

Još dodamo periodičnost:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,, \quad k \in Z$$

v) $\sin x > 3$

Ovo je nemoguće, pa ova nejednačina nema rešenja.

<u>Primer 2.</u> Reši nejednačine:

a) $\sin x < -2$

b) $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

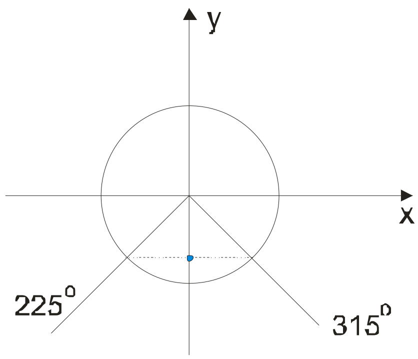
v) $\sin x < 5$

Rešenja:

a) $\sin x < -2$ $\Rightarrow$ Kako je $-1 \le \sin x \le 1$, dakle nikad ne može biti manji od -2, data nejednačina nema rešenja

b) $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Najpre rešimo jednačinu $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

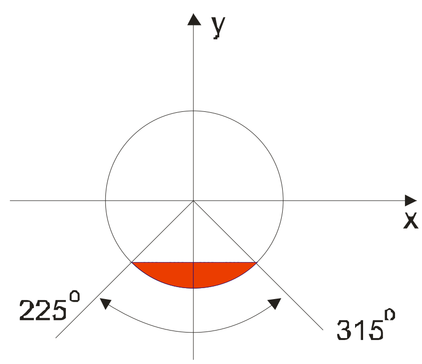


Rešenja su:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

Za nejednačinu $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nama treba "donji" deo !

Dakle:



$$\frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$
$k \in Z$

v) $\sin x < 5$

Kako je $-1 \le \sin x \le 1$, ova nejednačina je uvek zadovoljena,tj. $\forall x \in R$ je rešenje.

2.**Nejednačine cosx>b i cosx<b**

$\boxed{\cos x > b}$

$b < -1$ **- svaki broj je rešenje**

$-1 \le b \le 1$ **- rešavamo**

$b \ge 1$ **- nema rešenja**

$\boxed{\cos x < b}$

$b < -1$ **- nema rešenja**

$-1 \le b \le 1$ **- rešavamo**

$b > 1$ **- svaki broj je rešenje**

Primer 1.

Reši nejednačine:

a) $\cos x > -2$

b) $\cos x > \frac{1}{2}$

v) $\cos x > \frac{3}{2}$

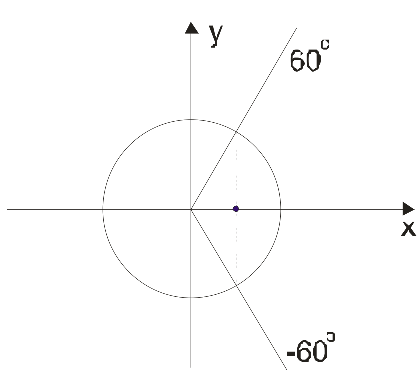
Rešenja:

a) $\cos x > -2$ ovde je svaki $x \in R$

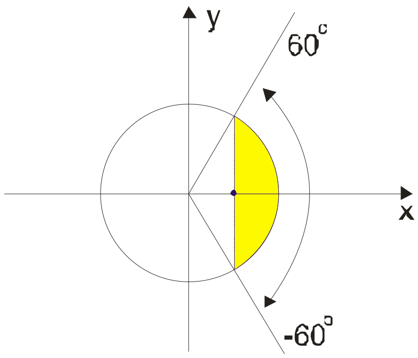
b) $\cos x > \frac{1}{2}$

Najpre rešimo $\cos x = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$



Za rešenja nejednačine su nam potrebni uglovi čiji je kosinus veći od $\frac{1}{2}$,znači “**desno”.**



Konačno rešenje je $-\frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{\pi}{3}+2k\pi \quad , \quad k \in Z$

v) $\cos x > \frac{3}{2}$

Ova nejednačina nema rešenja jer najveća vrednost za “kosinus”, kao što znamo, može biti 1.

<u>Primer 2.</u>

Reši nejednačine:

a) $\cos x < -2$

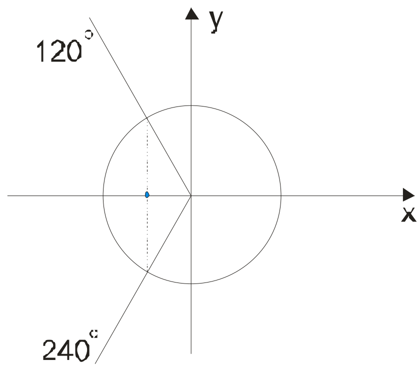
b) $\cos x \le -\frac{1}{2}$

v) $\cos x < 2$

Rešenja:

a) $\cos x < -2$ - nema rešenja

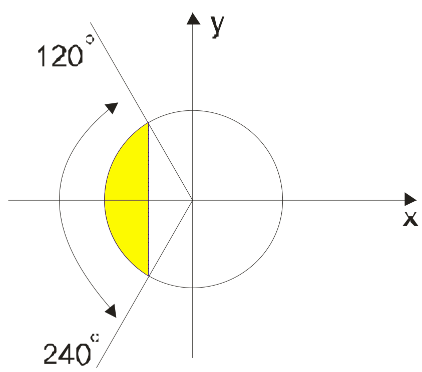
b) $\cos x \le -\frac{1}{2}$ -rešićemo prvo $\cos x = -\frac{1}{2}$



Rešenja jednačine su:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Za rešenje nejednačine $\cos x \le -\frac{1}{2}$ nam treba **"levi"** deo:



Dakle, rešenje je $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

v) $\cos x < 2$

Ovde je naravno rešenje $\forall x \in R$

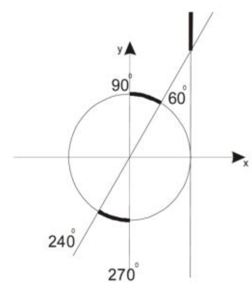
3. **<u>Nejednačine sa tg$x$ i ctg$x$</u>**:

Ove nejednačine za razliku od onih sa $\sin x$ i $\cos x$ **uvek imaju rešenja** s obzirom da tg$x$ i ctg$x$ uzimaju vrednosti iz celog skupa realnih brojeva.

I ovde ćemo najpre rešiti odgovarajuću jednačinu i na osnovu nje odrediti interval rešenja date nejednačine.

<u>Primer1.</u>

a) tg $x > \sqrt{3}$



Najpre rešimo jednačinu tg $x = \sqrt{3}$. Rešenja su $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Razmišljamo za koje uglove je tg x veći od $\sqrt{3}$?

Prvo su to uglovi od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{\pi}{2}$. A onda i drugi interval od $\frac{4\pi}{3}$ do $\frac{3\pi}{2}$.(posmatrajući trigonometrijski krug)

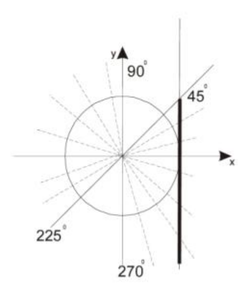
Zbog periodičnosti funkcije tg x, skup rešenja nejednačine zapisujemo u sledećom obliku:

$x \in \ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\Big), k \in \mathbb{Z}$.

b) tg $x \leq 1$

Prvo rešavamo jednačinu tg $x = 1$. Rešenja su $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nas zanimaju vrednosti tg x manje ili jednake od 1.(podebljana poluprava)



Opet možemo da primetimo dva intervala za koja to važi na trigonometrijskog krugu:

$-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{4}$. (uglove $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ ne uključujemo zbog domena funkcije tg x)

Skup svih rešenja nejednačine možemo zapisati u sledećem obliku:

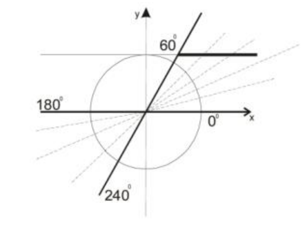
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}.$

Primer2.

a) $\operatorname{ctg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Prvo rešimo jednačinu $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Rešenja su $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nas zanimaju vrednosti $\operatorname{ctg} x$ veće ili jednake od $\frac{\sqrt{3}}{3}$.(podebljana poluprava)



Možemo da primetimo dva intervala za koja to važi na trigonometrijskog krugu:

$0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ i $\pi < x \leq \frac{4\pi}{3}$. (uglove 0 i π ne uključujemo zbog domena funkcije $\operatorname{ctg} x$)

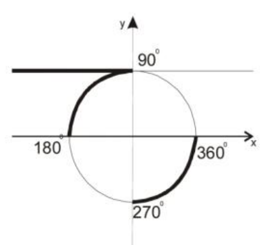
Skup svih rešenja nejednačine možemo zapisati u sledećem obliku:

$x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}.$

b) $\operatorname{ctg} x < 0$

Prvo rešimo jednačinu $\operatorname{ctg} x = 0$. Rešenja su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nas zanimaju vrednosti $\operatorname{ctg} x$ manje od 0.(podebljana poluprava)



Uočavamo uglove iz II i IV kvadranta koji to zadovoljavaju: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ i $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Skup rešenja ove nejednačine možemo zapisati u sledećem obliku:

$x \in \ \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\Big), k \in \mathbb{Z}$.

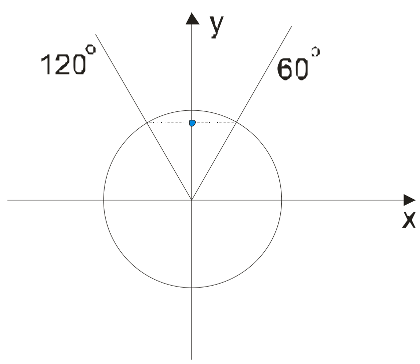
Zadaci:

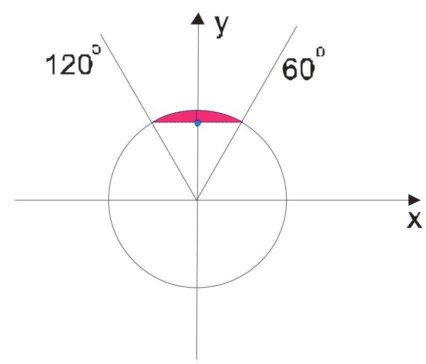
1) Reši nejednačinu: $\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$

Najpre rešimo

$$\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$
$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rešenja jednačine su na slici 1.





$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Sad rešavamo nejednačinu. Očigledno nam treba **gornji** deo :

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (slika 2.)

Sve podelimo sa 3

$$\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$
$$k \in Z$$

3) Reši nejednačinu: $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 > 0$

$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 > 0$ $\rightarrow$ smena sinx=t

$2t^2 + 5t + 2 > 0 \rightarrow$ pogledaj kvadratne nejednačine!

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = -\frac{1}{2}$$

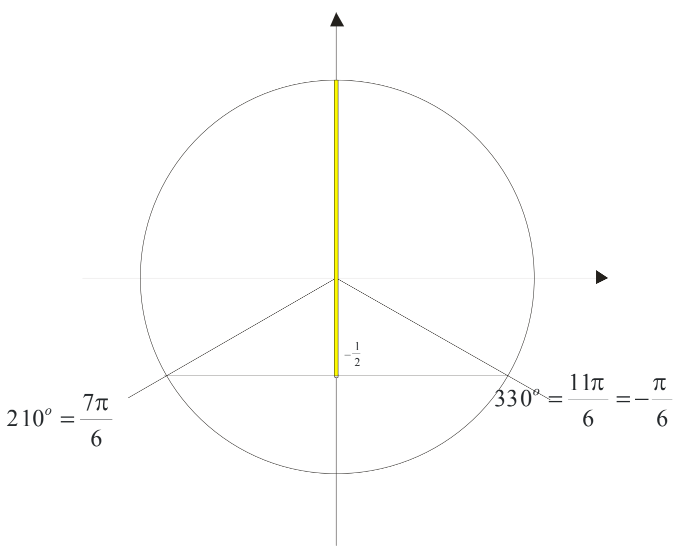
$$t_2 = -2$$

$$t \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, \infty) tj,$$

$$\sin x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$$

Pošto je $-1 \le \sin x \le 1$ moramo izvršiti korekciju intervala!

$\sin x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ odnosno $\sin x > -\frac{1}{2}$



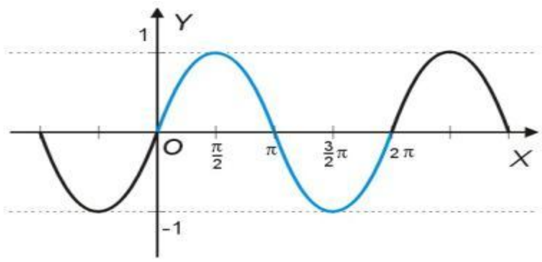
$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in Z$$

Je konačno rešenje!

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

$y = \sin x$

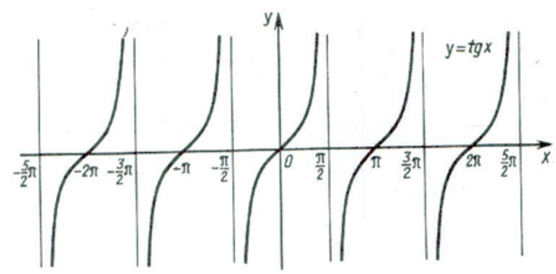


- $D = \mathbb{R}$, $\overline{D} = [-1,1]$
- Periodična f-ja sa osnovnim periodom $T = 2\pi$

  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

- $y = 0$ za $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y_{max} = 1$ za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $y_{min} = -1$ za $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Neparna funkcija $\sin(-x) = -\sin x$
- $y \nearrow$ za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
- $y \searrow$ za $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$y = \text{tg}\, x \left(= \frac{\sin x}{\cos x}\right)$

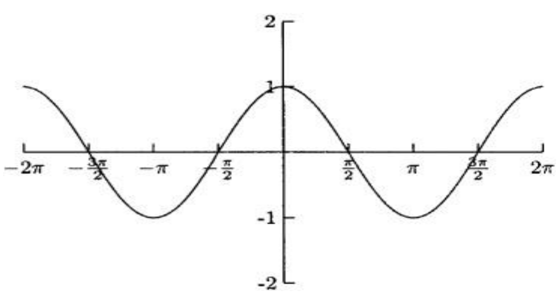


- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}$
- Periodična f-ja sa osnovnim periodom $T = \pi$

  $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}\, x$

- $y = 0$ za $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Neparna funkcija $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x$
- y je monotono rastuća za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$y = \cos x$

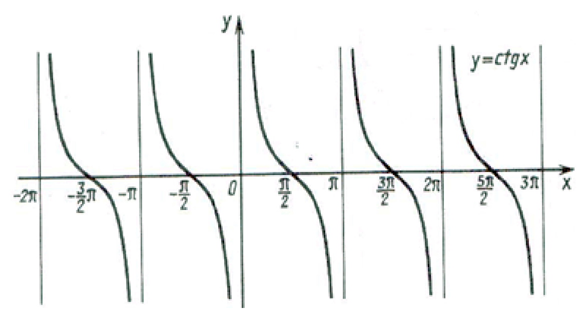


- $D = \mathbb{R}$, $\overline{D} = [-1,1]$
- Periodična f-ja sa osnovnim periodom $T = 2\pi$

  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

- $y = 0$ za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $y_{max} = 1$ za $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $y_{min} = -1$ za $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Parna funkcija $\cos(-x) = \cos x$
- $y \nearrow$ za $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
- $y \searrow$ za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$y = \text{ctg}\, x \left(= \frac{\cos x}{\sin x}\right)$



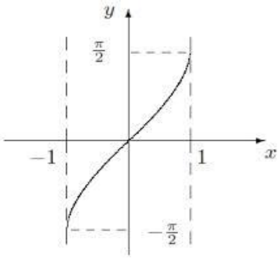
- $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}$
- Periodična f-ja sa osnovnim periodom $T = \pi$

  $\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg}\, x$

- $y = 0$ za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Neparna funkcija $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}x$
- y je monotono opadajuća za $x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

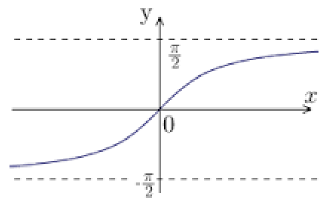
Inverzne trigonometrijske funkcije

$y = \mathbf{arcsin}\, x$



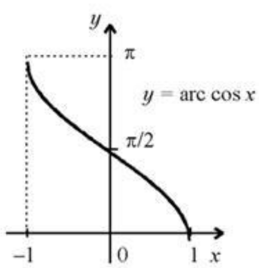
$D = [-1,1]$, $\overline{D} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \mathbf{arctg}\, x$



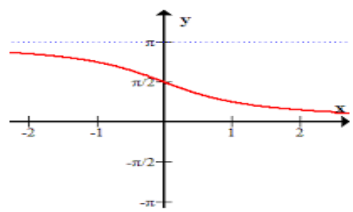
$D = \mathbb{R}$, $\overline{D} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \mathbf{arccos}\, x$



$D = [-1,1]$, $\overline{D} = [0, \pi]$

$y = \mathbf{arcctg}\, x$



$D = \mathbb{R}$, $\overline{D} = (0, \pi)$