

ODREDJENI INTEGRAL

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana na segmentu $[a, b]$, $a < b$. Podelimo segment $[a, b]$ tačkama

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

na n podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. U svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberemo proizvoljnu tačku ξ_i , dakle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Označimo sa Δx_i dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tj neka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Označimo sa Δx_{max} dužinu najvećeg intervala podele.

Definicija: Suma

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

je integralna suma funkcije $f(x)$ koja odgovara datoj podeli segmenta $[a, b]$ i datom izboru tačaka ξ_i .

- Geometrijski, data suma predstavlja površinu stepenaste figure sastavljene od n pravougaonika čije su stranice Δx_i i $f(\xi_i)$ (vidi sliku).

Definicija: Ukoliko postoji konačna granična vrednost integralnih suma σ kada $\Delta x_{max} \rightarrow 0$, koja ne zavisi od podele segmenta $[a, b]$ i izbora tačaka ξ_i , onda se ona zove odredjeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ i označava sa

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- Geometrijski, ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i pozitivna, odredjeni integral predstavlja površinu krivolinijskog trapeza, ograničenog odozgo grafikom funkcije $f(x)$, pravama $x = a$ i $x = b$ sa strane i x osom odozdo.

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na intervalu $[a, b]$. Označimo

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \dots M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Sume

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

i

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

zovu se donja i gornja Darbuova suma funkcije $f(x)$ za datu podelu intervala $[a, b]$. (vidi sliku).

Tvrđenje: Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na intervalu $[a, b]$. Funkcija $f(x)$ je integrabilna na intervalu $[a, b]$ akko za svaki pozitivan broj ϵ postoji podela intervala $[a, b]$ takva da važi

$$S - s \leq \epsilon.$$

- Neke klase integrabilnih funkcija:

Tvrđenje: Neka je funkcija $f(x)$ definisana i neprekidna na intervalu $[a, b]$. Tada je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$.

Tvrđenje: Neka je funkcija $f(x)$ ograničena na intervalu $[a, b]$ i neka ima konačno mnogo prekida na tom intervalu. Tada je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$.

Tvrđenje: Neka je funkcija $f(x)$ monotona na intervalu $[a, b]$. Tada je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$.

- Osobine odredjenog integrala:

1.

$$\int_a^b dx = b - a.$$

2.

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ onda je ona integrabilna na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$ i važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4. Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na intervalu $[a, b]$ onda je i funkcija $\alpha f(x) + \beta g(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ i važi

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

5. Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na intervalu $[a, b]$ i ako je $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

6. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ onda je i funkcija $|f(x)|$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ i važi

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

7. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$ onda postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

(vidi sliku).

- Njutn-Lajbnicova formula:

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$. Posmatračemo funkciju

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Tvrđenje: Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ onda je funkcija $F(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$.

Tvrđenje: Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$ onda je funkcija $F(x)$ neprekidna na intervalu (a, b) i važi

$$F'(x) = f(x).$$

Dokaz: Posmatračemo priraštaj funkcije $F(x)$:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)\Delta x.$$

Odatle je

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Tvrđenje: Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$ i ako je $\Phi(x)$ njena proizvoljna primitivna funkcija. Tada važi

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Dokaz:

Pošto znamo da se svake dve primitivne funkcije $f(x)$ razlikuju do na konstantu, zaključujemo da je

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Stavljajući da je $x = a$, dobijamo da je

$$\Phi(a) = C.$$

Dalje, Stavljajući da je $x = b$, dobijamo da je

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C = \int_a^b f(t) dt + \Phi(a).$$

Odavde je

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

- Primena odredjenog integrala:

I Površina figure u ravni

Direktna posledica definicije (vidi sliku).

II Dužina luka krive u ravni.

- Kriva - grafik funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Kriva - zadata parametarskim jednačinama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Primer

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Neka je kriva L zadata parametarskim jednačinama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Podelimo interval $[\alpha, \beta]$ na podintervale

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

i odgovarajuće tačke na krivoj L označimo sa M_0, M_1, \dots, M_n .

Posmatraćemo izlomljenu liniju sastavljenu od tih tačaka,

tj. liniju sastavljenu iz duži $\overline{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, \dots, n$ (vidi sliku). Označimo sa $s(\overline{M_{i-1}M_i})$ dužinu duži $\overline{M_{i-1}M_i}$. Imamo da je

$$s(\overline{M_0M_n}) = \sum_{i=1}^n s(\overline{M_{i-1}M_i}).$$

Definicija: Ukoliko postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{\Delta t_{max} \rightarrow 0} s(\overline{M_0M_n}),$$

onda kažemo da je kriva l ispravljiva, tj. da ima dužinu. Pomenuta granična vrednost se u tom slučaju zove dužina luka krive L .

Definicija: Kriva L je glatka ako su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ neprekidne zajedno sa svojim izvodima i ako $x'(t)$ i $y'(t)$ nisu istovremeno jednaki nuli ni za jedno $t \in [\alpha, \beta]$.

- Neka funkcija $f : [a, b] \rightarrow R$ zadovoljava sledeće uslove:
 1. Neprekidna je na intervalu $[a, b]$.
 2. Diferencijabilna je na intervalu (a, b) .

Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tvrđenje: Neka je kriva L glatka. Tada je ispravljiva i dužina luka krive L se računa po formuli

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Dokaz:

Imamo da je

$$s(\overline{M_0M_n}) = \sum_{i=1}^n s(\overline{M_{i-1}M_i}) = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Na svakom intervalu $[t_i, t_{i-1}]$ primenimo Lagranžovu teoremu. Imamo da je

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\xi_i)\Delta t_i, & \xi_i &\in [t_i, t_{i-1}], \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\eta_i)\Delta t_i, & \eta_i &\in [t_i, t_{i-1}]. \end{aligned}$$

Dakle važi

$$s(\overline{M_0M_n}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \Delta t_i.$$

Prelaskom na limes i uzimajući da, kada $\Delta t_{max} \rightarrow 0$, možemo smatrati da je $\xi_i = \eta_i$, dobijamo da je

$$\lim_{\Delta t_{max} \rightarrow 0} s(\overline{M_0M_n}) = \lim_{\Delta t_{max} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2} \Delta t_i,$$

tj. konačno

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- Kriva - grafik funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

III Površina obrtnog tela:

-

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- Kriva - grafik funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$P = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

IV Zapremina obrtnog tela:

-

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)^2 x'(t) dt.$$

- Kriva - grafik funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$V = \pi \int_a^b y(x)^2 dx.$$