НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

$f(x)$ – дато . треба да нађемо $F(x)$ такво да

$$F'(x) = f(x) \text{, тј.}$$

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

ДЕФИНИЦИЈА: $F(x)$ ПРИМИТИВНА ФЈА ф-је $f(x)$ (a,b)

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a,b)$$

пример: $f(x) = \sin x$ $\quad F(x) = -\cos x$, јер $(-\cos)' = \sin x$

$f(x) = \cos x$ $\quad F(x) = \sin x$, јер $(\sin x)' = \cos x$

$f(x) = e^x$ $\quad F(x) = e^x$, јер $(e^x)' = e^x$

$f(x) = 2x$ $\quad F(x) = x^2$, јер $(x^2)' = 2x$

шта је са $(x^2+3)' = 2x$

$(x^2 + 1024)' = 2x$

$(-\cos x + 10\,500)' = \sin x$

НАПОМЕНА: $F(x)$ примит. $f(x)$, $\Rightarrow$ $F(x) + C$ (где је $C = const$) примит. од $f(x)$.

$$(F(x)+c)' = F'(x) + \overset{=0}{c'} = F'(x) = f(x)$$

ТЕОРЕМА: Две прим..

ДЕФ: Скуп свих пр. ф-ја $F(x)+C$ од $f(x)$...

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ $f(x)$....

$$\underbrace{\int}_{\text{интеграл}} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{подинтегрална ф-ја}}\,dx}_{\text{подинтегрални израз}} = \underbrace{F(x)}_{\text{примитивна ф-ја (од неке друге ф-је)}} + C$$

ОСОБИНЕ:

1° $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

$\int (\cos x + 10)\,dx = \sin x + C$

$(\sin x + C)' = \cos x$

претходни семестар:

$F'(x) = f(x)$, тј.

$dF(x) = f(x)\,dx$

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

$\downarrow$

$F'(x) = f(x)$

$\int dF(x) = \int f(x)\,dx$

$\downarrow$

2° $\int dF(x) = F(x) + C$

$\int f(x)\,dx = \underbrace{\int dF(x)} = F(x) + C$

$\downarrow$

спец. случај $F(x) = x$

$\int dx = x + C$

3° ХОМОГЕНОСТ:

$\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4° $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

ЛИНЕАРНОСТ:

$\int (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx$

пример: 1° $(\sin x)' = \cos x \implies \int \cos x\,dx = \sin x + C$

таблични интеграл

2° $(\cos x)' = -\sin x \implies \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

3° $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

4° $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

5° $$\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)' = \frac{1}{\alpha}(x^\alpha)' = \frac{1}{\cancel{\alpha}} \cancel{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$$

$$\int x^{\alpha-1} dx = \frac{x^\alpha}{\alpha} + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

6° $$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\cancel{\ln a}} \cdot \cancel{\ln a} \cdot a^x = a^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛА

1° $\int dx = x + C$

2° $\int 0 \cdot dx = C$

3° $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\;\Big|_{\alpha=-1}$ СПЕЦ. СЛУЧАЈ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}$

4° $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a>0$, $a \neq 1$ $\;\Big|_{a=e}$ $\int e^x dx = e^x + C$

5° $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, $\forall x \in \mathbb{R}$

6° $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $\forall x \in \mathbb{R}$

7° $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

8° $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x = k \cdot \pi$

9° $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C$

МЕТОДА НЕПОСРЕДНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

- трансформишемо подинт. израза ...
- примене таблица ..
- основних особина ..

пример: $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x}+2}{x^4}\,dx = \int\left(\frac{x^2}{x^4}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x^4}+\frac{2}{x^4}\right)dx =$

$= \int \frac{x^2}{x^4}\,dx + \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4}\,dx + \int \frac{2dx}{x^4} = \int x^{-2}\,dx + \int x^{-\frac{11}{3}}\,dx + 2\int x^{-4}\,dx =$

таблични x^a

$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_1 + \frac{x^{-\frac{11}{3}+1}}{-\frac{11}{3}+1} + C_2 + 2\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C_3$

$= -\frac{1}{x} - \frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{8}{3}} - \frac{2}{3}\cdot x^{-3} + \underbrace{C_1+C_2+C_3}_{=C}$

пример2: $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{1\cdot dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{\sin^2}}{\cos^2 x\,\cancel{\sin^2 x}}\,dx + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= tg\,x - ctg\,x + C$

пример 3: $\int (5x-2)^2\,dx = \int(25x^2-20x+4)\,dx =$

$25\int x^2\,dx - 20\int x\,dx + 4\int dx =$

$= 25\cdot\frac{x^3}{3} - 20\cdot\frac{x^2}{2} + 4x + C$

МЕТОДА СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

ТЕОРЕМА: $x=\varphi(t)$ диф. ф-ја на (α,β), нека је (a,b) φ : $f(\varphi(t))$. Ако ф-ја $f(x)$ има $F(x)$, онда и $f(\varphi(t))$ има $F(\varphi(t))$:

$$\int f(\underbrace{x}_{\varphi(t)})\,\underbrace{dx}_{\varphi'(t)\,dt} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\underbrace{\varphi(t)}_{\text{овде враћамо } x})+C$$

пример 1: $\int (\underbrace{5x-2}_{t})^{11}\,dx$ $\quad dx = \frac{dt}{5}$

$t=5x-2 \Rightarrow t+2=5x$, $\quad x=\frac{t+2}{5}$

$t=\varphi(x)$

$dt = d(5x-2)$

$dt = 5dx - d2$, $\quad d2 = 0$

$dt = 5dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{5}$

$$=\int t^{11}\cdot\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^{11}\,dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{12}}{12}+C$$

$$=\frac{1}{60}(5x-2)^{12}+C$$

пример 2: $\int e^{2x}\,dx =$

$d\ /\ t=2x$

$dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

$$=\int e^{t}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot e^{t}+C = \frac{1}{2}e^{2x}+C$$

пример 3: $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\underbrace{x^2+3x+7}_{=t}}\,dx$

$t = x^2+3x+7 \quad \Rightarrow \quad dt = (2x+3)\,dx$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+3x+7| + C$$

или $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+7}{2x+3}\,dx$?

МЕТОД ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

пример: $\displaystyle\int \frac{\overbrace{\ln x}^{=t}}{x}\,dx = \int t\cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

t'

смена: $t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x}\,dx$

пример 2: $\displaystyle\int x\cdot \underbrace{\ln x}_{t}\,dx = \int x\, t\, x\,dt = \int x^2 t\,dt$

$t = \ln x$

$dt = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow dx = x\cdot dt$

ТЕОРЕМА: $u(x)$ и $v(x)$. $u'(x)v(x)$ има прим. ф-ју,
$\Rightarrow$ $u(x)\cdot v'(x)$

$$\int \overbrace{u(x)v'(x)\,dx}^{\mathrm{I}} = u(x)v(x) - \int \overbrace{u'(x)v(x)\,dx}^{\mathrm{II}}$$

скраћено: $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

Примењује се ако нам је једноставније да решимо II инт. него I.

доказ: $d(uv) = du\cdot v + u\cdot dv \quad /\int$

$$\int d(uv) = \int v\cdot du + \int u dv$$

$$uv = \int v du + \int u dv$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

што је и тд.

пример 2: $\int \underbrace{x\cdot \ln x\, dx}_{dv}$, $u = \ln x$

$\downarrow$

$\int u\, dv$?

$u(x) = u = \ln x \qquad dv = x dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \qquad v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C$

додаје но на крају!

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot \frac{dx}{\cancel{x}} =$$

$\int u dv = uv - \int v du$

једноставнији од почетног

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \overset{\text{II}}{x}\, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

пример: $\int \underbrace{x^2}_{u}\cdot \underbrace{e^x dx}_{dv} = \left[\begin{matrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right] = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx =$

$$= x^2 e^x - 2\underbrace{\int x\cdot e^x dx}_{\text{овај } \int \text{ је једноставнији јер се снизио степен } x} = \left[\begin{matrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{matrix}\right] =$$

овај $\int$ је једноставнији
јер се снизио степен x

$$= x^2 e^x - 2\left[x\cdot e^x - \underbrace{\int e^x dx}_{\text{једноставнији!}}\right] = x^2 e^x - 2xe^x + 2\cdot e^x + C_1$$

једноставнији!